wydanie piąte
dodatek – zastosowania

JÓZEF BANAŚ
STANISŁAW WĘDRYCHOWICZ

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE
50 lat WNT

zbiór zadań z analizy matematycznej

Książka ta jest zbiorem zadań z analizy matematycznej. Oprócz zadań typowych zawiera także wiele zadań niestandardowych, wymagających od rozwiązującego dużej pomysłowości i inwencji.

Większość zadań jest zaopatrzona we wskazówki i rozwiązania, a niemal wszystkie mają odpowiedzi.

W zależności od stopnia trudności zadania zostały podzielone na trzy grupy: A, B i C.

Książka jest adresowana do studentów i uczniów pragnących poznać i zgłębić podstawy analizy matematycznej oraz opanować jej metody związane z zastosowaniami w ekonomii, fizyce, chemii, biologii, fizjologii i psychologii.

Cena 23 zł 50 gr

ISBN 83-204-2363-5

9 788320 423631

zbiór zadań z analizy matematycznej

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE • WARSZAWA

JÓZEF
BANAŚ

STANISŁAW
WĘDRYCHOWICZ

Wydanie piąte

zbiór zadań z analizy matematycznej

Opiniodawcy: *dr Grzegorz Decewicz, prof. dr hab. Stanisław Szufla*
Redaktorzy: *mgr Lilianna Szymańska, mgr Małgorzata Rajwacka-Jachymek*
Redaktor techniczny *Irena Milewska-Burczykowa*
Okładkę i strony tytułowe projektował *Wojciech Jerzy Steifer*

517(076)

Książka jest zbiorem zadań wraz z odpowiedziami. Zamieszczono zadania dotyczące: zastosowania indukcji matematycznej, algebry zbiorów, liczb rzeczywistych, podstawowych własności funkcji, elementów przestrzeni metrycznych, ciągów liczbowych, granicy i ciągłości funkcji, rachunku różniczkowego funkcji jednej i wielu zmiennych, całki pojedynczej Riemanna, całek niewłaściwych, szeregów liczbowych, ciągów i szeregów funkcyjnych oraz równań funkcyjnych.
W książce znajdują się również zadania związane z zastosowaniami analizy matematycznej w ekonomii, fizyce, chemii, biologii, fizjologii i psychologii. Książka jest przeznaczona dla studentów wydziałów matematyki, informatyki, ekonomii, a także wydziałów przyrodniczych studiów uniwersyteckich; dla studentów uczelni technicznych, uczelni ekonomicznych oraz wyższych szkół pedagogicznych.

Podręcznik akademicki dotowany przez Ministerstwo Edukacji Narodowej

Adres poczty elektronicznej: wnt@pol.pl
Strona WWW: www.wnt.com.pl

ISBN 83-204-2363-5

WNT Warszawa 1999. Wyd. V
Ark. wyd. 25,8. Ark. druk. 30,5.
Symbol MF/83437/MEN
Zakłady Graficzne w Poznaniu — 70399/99

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA DO WYDANIA TRZECIEGO

Analiza matematyczna jest podstawową dyscypliną matematyki wykładaną zarówno dla studentów uczelni technicznych, jak i dla studentów różnorakich kierunków studiów uniwersyteckich. Opanowanie analizy w takim zakresie, który umożliwiałby swobodne operowanie jej pojęciami i metodami, a także stwarzałby możliwość stosowania tych pojęć i metod w innych naukach oraz np. w praktyce inżynierskiej, wymaga rozwiązania wielu zadań i problemów. Zadania te pojawiają się albo w ramach samej analizy, albo też są związane z różnorodnymi jej zastosowaniami.

Celem autorów jest dostarczenie studentom takiego zbioru zadań, z którego mogliby korzystać zarówno wtedy, gdy zechcą opanować podstawowe pojęcia i metody analizy matematycznej, jak również i wtedy, gdy będą chcieli poznać i zgłębić bardziej zaawansowane i przydatne w zastosowaniach jej narzędzia. Zbiór ten zawiera zadania odpowiadające zakresowi materiału z analizy matematycznej, jaki jest wykładany przeważnie w czasie pierwszego roku studiów technicznych i uniwersyteckich. Jest to z pewnością materiał dla studentów bardzo trudny, ponieważ opiera się on głównie na takich fundamentalnych pojęciach analizy, jak pojęcie granicy i ciągłości. Szczególne trudności w przyswajaniu tego materiału mają studenci studiów technicznych oraz niematematycznych kierunków studiów uniwersyteckich.

Przedkładany zbiór zadań wychodzi naprzeciw tym metodom, w nauczaniu analizy matematycznej, które zrywają z zadaniami typowymi i rozwiązywanymi mechanicznie, kładąc główny nacisk na zadania wymagające od rozwiązujących pewnego wysiłku myślowego. Zbiór ten jest przeznaczony głównie dla studentów kierunku matematyki studiów uniwersyteckich. Mogą z niego korzystać również studenci uczelni technicznych, studenci różnych kierunków uniwersytetów, wyższych szkół pedagogicznych i akademii ekonomicznych, dla których analiza matematyczna jest przedmiotem podstawowym lub pomocniczym.

Wychodząc naprzeciw potrzebom dużej grupy studiujących na takich kierunkach, jak: ekonomia, zarządzanie i marketing, fizyka, chemia, biologia, autorzy zamieścili w obecnym wydaniu dodatkowy rozdział, zwany „Dodatkiem", w którym zamieszczono zadania i problemy nawiązujące do tych potrzeb.

Zbiór jest podzielony na dwie części, z których pierwsza zawiera teksty zadań. W drugiej zaś (nieco obszerniejszej) podano odpowiedzi, wskazówki oraz częściowe lub nawet całkowite rozwiązania większości zawartych w pierwszej części zadań. Każda ze wspomnianych dwóch części jest podzielona na szesnaście rozdziałów, wzajemnie sobie odpowiadających. W rozdziałach tych są zawarte zadania dotyczące poszczególnych działów analizy matematycznej.

Aby ułatwić studiującym korzystanie ze zbioru, zadania każdego rozdziału podzielono na trzy części, oznaczone odpowiednio jako części A, B i C. W części A każdego rozdziału znajdują się zadania stosunkowo łatwe, czasami nawet standardowe, których przerobienie zapewnia opanowanie podstawowego materiału z analizy matematycznej.

Nieco trudniejsze zadania są zebrane w częściach B. Wymagają one od studiujących niejednokrotnie dużej inwencji i są z reguły przeznaczone dla studentów bardziej uzdolnionych matematycznie.

W częściach C zebrano zadania, które często nawiązują do kilku działów analizy matematycznej, mają więc charakter syntetyczny. Są to także najtrudniejsze z zadań każdego rozdziału. Z zadań tych z powodzeniem mogą korzystać studenci kierunku matematyki uczelni pedagogicznych i uniwersytetów.

Zbiór ten zawiera rozdział, który prawie wcale nie pojawia się w dostępnych zbiorach zadań. Jest to rozdział XI zatytułowany „Równania funkcyjne". Zamieszczone w nim zadania i problemy są w zasadzie przeznaczone dla entuzjastów i hobbystów matematyki. Dużą satysfakcją autorów będzie, jeżeli wśród studentów tacy entuzjaści się znajdą.

Pragniemy wyrazić podziękowanie recenzentom tej książki, panu doktorowi Grzegorzowi Decewiczowi i panu profesorowi Stanisławowi Szufli, za wiele cennych uwag, które przyczyniły się do usunięcia wielu usterek i ulepszenia tekstu. Dziękujemy również panu doktorowi Andrzejowi Birkholcowi za wnikliwe uwagi i spostrzeżenia, które pozwoliły wyeliminować w trzecim wydaniu niektóre błędy i niekonsekwencje.

Rzeszów, w lutym 1996

Józef Banaś
Stanisław Wędrychowicz

ROZDZIAŁ I

INDUKCJA MATEMATYCZNA

Część A

1. Pokazać, że
$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
dla dowolnego n naturalnego.

2. Pokazać, że
$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

3. Udowodnić, że
$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$$
dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka: Skorzystać z zad. 1.

4. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba postaci $3^{4n+2}+1$ jest podzielna przez 10.

5. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba 13^n-7 jest podzielna przez 6.

6. Pokazać, że dla dowolnego n naturalnego takiego, że $n \geqslant 5$ zachodzi $2^n > n^2$.

7. Niech a będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą, $a > -1$. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest spełniona nierówność
$$(1+a)^n \geqslant 1+na$$
zwana *nierównością Bernoulliego.*

8. Udowodnić, że dla dowolnego n naturalnego oraz x rzeczywistego zachodzi nierówność
$$|\sin nx| \leqslant n|\sin x|.$$

9. Udowodnić, że dowolną kwotę pieniędzy złożoną z n złotych ($n \geqslant 4$) można wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi.

10. Udowodnić, że suma kątów wewnętrznych w n-kącie wypukłym wynosi $(n-2)\pi$.

11. Wyznaczyć liczbę odcinków łączących n punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe.

12. Wyznaczyć liczbę przekątnych w n-kącie wypukłym.

13. Udowodnić, że

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}$$

dla dowolnej liczby naturalnej n.

14. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest prawdziwa równość

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

15. Wykazać, że

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

16. Udowodnić, że dla dowolnie ustalonych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi tzw. *wzór dwumianowy Newtona*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

17. Pokazać, że

$$2^3+4^3+\ldots+(2n)^3 = 2(2+4+\ldots+2n)^2$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

18. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{3} = 2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{n+1}{6}\pi.$$

19. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4^n+15n-1$ jest podzielna przez 9.

20. Pokazać, że liczba 10^n+4^n-2 jest podzielna przez 3 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

21. Udowodnić, że liczba postaci n^3+2n jest podzielna przez 3 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

22. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ jest podzielna przez 8.

23. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $2^{6n+1}+3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11.

24. Udowodnić, że
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$
dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Część B

25. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $11^{n+2}+12^{2n+1}$ dzieli się przez 133.

26. Pokazać, że n^7-n jest podzielna przez 7 dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

27. Pokazać, że n^3-n jest podzielna przez 6 dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

28. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dowolnymi liczbami tego samego znaku takimi, że $a_k > -1$ oraz $a_k \neq 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić, że zachodzi nierówność
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) > 1+a_1+\ldots+a_n$$
zwana *nierównością Weierstrassa.*

29. Pokazać, że dla każdego n naturalnego parzystego liczba n^3+20n jest podzielna przez 48.

30. Udowodnić, że
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
dla każdej liczby naturalnej n.

31. Pokazać, że
$$1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$$
dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

32. Wykazać, że
$$\sin x+\sin(x+h)+\ldots+\sin(x+nh)=\frac{\sin\left(x+\frac{nh}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$
gdzie $h \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, zaś n jest dowolną liczbą naturalną.

33. Pokazać, że dla dowolnego n naturalnego, $n \geqslant 2$, jest spełniona nierówność
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right).$$

34. Pokazać, że

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$$

dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$.

35. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n jest spełniona nierówność

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

36. Niech a i b będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Pokazać, że

$$(a+b)^n<2^n(a^n+b^n)$$

dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$.

37. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n jest prawdziwa równość

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+n(n+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

38. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$ jest prawdziwa nierówność

$$3^n>n\cdot 2^n.$$

39. Udowodnić, że jeżeli $a_1,a_2,\ldots,a_n$ $(n\geqslant 2)$ tworzą ciąg arytmetyczny i $a_i\neq 0$ dla $i=1,2,\ldots,n$, to

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

40. Wykazać, że dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ są prawdziwe następujące równości:

a) $$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$ dla $x\in\mathbb{R}$ oraz $x\neq 2k\pi$

$(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$,

b) $$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$ dla x takich jak w a),

c) $$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx=\frac{(-1)^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cos\frac{x}{2}},$$ dla $x\in\mathbb{R}$ oraz

$x\neq(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

41. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

42. Udowodnić, że jeśli $x_k \in [0, \pi]$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, to

$$|\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)| \leqslant \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

43. Pokazać, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

44. Udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

45. Pokazać, że liczba $5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$ jest podzielna przez 41 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

46. Udowodnić, że liczba $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ jest podzielna przez 25 dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

47. Wykazać, że dla każdego naturalnego n, $n \geqslant 2$, liczba $2^{2^n} - 6$ jest podzielna przez 10.

48. Pokazać, że liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

49. Udowodnić, że suma $\dfrac{n^3}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{3}$ jest liczbą naturalną dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

50. Pokazać, że $\dbinom{n}{k}$ jest liczbą całkowitą dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla każdego k całkowitego, $0 \leqslant k \leqslant n$.

51. Udowodnić, że liczba $10^{n+1} - 10(n+1) + n$ jest podzielna przez 81 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

52. Metodą indukcji udowodnić, że wielomian

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$$

jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Część C

53. Udowodnić, że jeśli iloczyn n liczb dodatnich ($n \geqslant 2$) jest równy 1, to ich suma jest nie mniejsza niż n, tzn. jeśli $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ oraz $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$, to $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

54. Udowodnić, że średnia geometryczna n liczb rzeczywistych nieujemnych ($n \geqslant 2$) jest nie większa od średniej arytmetycznej tych liczb, tzn.

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \text{ dla } x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0.$$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 53.

55. Pokazać, że $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ dla dowolnej liczby naturalnej n, $n \geqslant 2$.

56. Pokazać, że $(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$ dla $n \geqslant 2$.

Wskazówka do zad. 55 i 56: Wykorzystać nierówności z zad. 54.

57. Niech n będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną, $n \geqslant 2$. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

58. Na pierwszym z trzech oznakowanych pól jest zbudowana piramida z n krążków w ten sposób, że krążki o średnicy mniejszej są położone na krążkach o średnicy większej. Wyznaczyć minimalną liczbę ruchów potrzebnych do przeniesienia tej piramidy na trzecie pole zakładając, że w jednym ruchu przenosimy tylko jeden krążek kładąc go na jedno z trzech pól i na krążek możemy położyć tylko krążek o średnicy mniejszej.

59. Niech k będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną, $k \geqslant 2$. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ są spełnione nierówności:

a) $\dfrac{n^{k+1}}{k+1} \geqslant 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$,

b) $\dfrac{n^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}} \geqslant 1 + 2^{-\frac{1}{k}} + \ldots + n^{-\frac{1}{k}}$.

60. Udowodnić, że jeśli m, n oraz k są liczbami całkowitymi nieujemnymi takimi, że $k \leqslant m+n$, to

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

61. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest równość

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 60.

62. Na płaszczyźnie poprowadzono n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznaczyć liczbę części, na które te n prostych dzieli płaszczyznę.

63. Udowodnić, że wśród obszarów, na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych.

64. Wykazać, że

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

65. Udowodnić, że $\sqrt[n]{n!} \geqslant \frac{n+1}{e}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

66. Wykazać, że $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

67. Wykazać, że $n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

68. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

69. Udowodnić, że $n^{n+1} > (n+1)^n$ dla każdego n naturalnego, $n \geqslant 3$.

70. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

71. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

72. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest spełniona nierówność

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

73. Ciąg liczb $\{a_n\}$ jest określony następująco: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$. Wykazać, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

74. Niech ciąg $\{c_n\}$ będzie określony następująco: $c_1 = \frac{a}{2}$, $c_{n+1} = \frac{a+c_n^2}{2}$, gdzie a jest zadaną liczbą z przedziału $(0, 1)$. Pokazać, że wszystkie wyrazy ciągu $\{b_n\}$, gdzie $b_n = 1-\sqrt{1-a}-c_n$, są dodatnie.

75. Połączono n punktów strzałkami w taki sposób, że każda para różnych punktów jest połączona strzałką. Udowodnić, że istnieje „centrum”, czyli punkt, z którego można dojść do każdego innego w co najwyżej dwóch krokach, idąc zgodnie z kierunkiem strzałek.

76. Wykazać, że dla $x \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego n naturalnego

$$(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)\dots(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1)=\frac{x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1}{x^2+x+1}.$$

77. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n wielomian

$$(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)^n+(x+1)\,x^{4n-1}$$

dzieli się przez x^5+1.

78. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$ jest liczbą naturalną.

79. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest spełniona nierówność

$$\sqrt[n]{n} \leqslant 1+\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

80. Udowodnić, że dla dowolnych $a,\ b \in \mathbb{R}$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest prawdziwa równość

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}ka^kb^{n-k}=na(a+b)^{n-1}.$$

81. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ są prawdziwe następujące zależności:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=n2^{n-1}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k=0, \quad (n \geqslant 2)$.

Wskazówka: Skorzystać z zad. 80.

Rozdział II

RACHUNEK ZBIORÓW

Jeżeli A jest podzbiorem zbioru X, to różnicę $X \setminus A$ będziemy nazywać *dopełnieniem zbioru* A (do zbioru X) i oznaczać symbolem A'. Mówiąc o dopełnieniach pewnych zbiorów będziemy zawsze zakładać, że wszystkie te zbiory są podzbiorami jakiegoś ustalonego zbioru X.

Różnicę symetryczną zbiorów A i B będziemy oznaczać przez $A \triangle B$. Przypomnijmy, że

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Wszystkie pozostałe oznaczenia stosowane w tym rozdziale są oznaczeniami powszechnie stosowanymi.

Część A

1. Niech $A = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6n+1 : n \in \mathbb{N}\}$. Znaleźć zbiory $A \cup B$ i $A \cap B$.

2. Niech $A = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{4n : n \in \mathbb{N}\}$. Wyznaczyć $A \cap B$.

3. Wyznaczyć $A \cap B$, gdzie $A = \{5n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{8n+2 : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Niech $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Znaleźć zbiory $A \cup B$ i $A \cap B$.

5. Podać interpretację geometryczną zbiorów $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leqslant 3\}$. Wyznaczyć zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

6. Dane są zbiory $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = a\}$. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ zbiór $A \cap B$ jest złożony z jednego punktu?

Pokazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości, będące podstawowymi prawami w rachunku zbiorów:

7. $A \cup B = B \cup A$ (prawo przemienności dla dodawania).

8. $A \cap B = B \cap A$ (prawo przemienności dla iloczynu).

9. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (prawo łączności dla dodawania).

10. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (prawo łączności dla iloczynu).

11. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania).

12. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia).

13. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzą następujące związki

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$,

zwane *prawami de Morgana.*

Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Pokazać, że:

14. $A \setminus B = A \cap B'$.

15. $(A \cup B) \cap A' = B \setminus A$.

16. $(A \cup B) \cap B' = A \setminus B$.

17. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

18. $A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$.

19. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

20. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

21. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

22. $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

23. $A \setminus B = (A' \cup B)'$.

24. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

25. $(A \setminus B) \cap C = [A \cap (B \cup C)] \setminus B$.

26. Sprawdzić, czy jest spełniona równość
$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

27. Wykazać, że

a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,

b) $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B)$.

28. Udowodnić, że jeżeli $A \subset B$, to $A = B \setminus (B \setminus A)$.

29. Wykazać, że:
$A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A' \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

30. Niech A, B, C, D będą dowolnymi zbiorami. Udowodnić, że
$(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) \subset (A \setminus C) \cup (D \setminus B)$.

31. Pokazać, że jeśli $A \subset C$ i $B \subset D$, to $A \cup B \subset C \cup D$ oraz $A \cap B \subset C \cap D$.

32. Przy założeniach z poprzedniego zadania pokazać, że $A \setminus D \subset C \setminus B$.

33. Pokazać, że jeśli $A \subset C$ i $B \subset C$, to $A \cup B \subset C$.

34. Udowodnić, że jeśli $C \subset A$ i $C \subset B$, to $C \subset A \cap B$.

35. Podać ilustrację geometryczną następujących iloczynów kartezjańskich:
a) $A \times B$, gdzie $A = [0,1) \cup \{2\}$, $B = \{1\}$,
b) $A \times B$, gdzie $A = [2, +\infty)$, $B = (-1, 1)$,
c) $A \times B$, gdzie $A = \mathbb{N}$, $B = (0, 1]$,
d) $A \times B \times C$, gdzie $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$, $C = \{1\}$,
e) $A \times B \times C$, gdzie $A = [0, +\infty)$, $B = [0, +\infty)$, $C = (0, +\infty)$.

36. W układzie współrzędnych kartezjańskich w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ podać ilustrację geometryczną iloczynu kartezjańskiego $A \times B$, gdzie A jest podzbiorem płaszczyzny xOy, B zaś jest podzbiorem osi Oz, a ponadto:
a) A jest okręgiem i $B = (a, b)$,
b) A jest kołem i $B = [0, +\infty)$.

37. Ile elementów ma iloczyn kartezjański $A \times B \times C$, jeżeli A ma n elementów, B ma m elementów, C ma k elementów?

38. Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Udowodnić, że są spełnione następujące równości:
a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

39. Pokazać, że
$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

40. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzi:
$(A \times B) \setminus (C \times D) = [(A \setminus C) \times B] \cup [(A \cap C) \times (B \setminus D)]$.

41. Wykazać, że zbiór n elementowy ma 2^n podzbiorów.

42. Niech $A_n = \left[1 + \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

43. Niech $A_n = (n, +\infty)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Wyznaczyć $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

44. Niech $A_n = \left[(-1)^n, 1 + \dfrac{1}{n}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

45. Niech $A_t = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant t^2\}$, $t \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć $\bigcap\limits_{t \in \mathbb{R}} A_t$.

46. Niech $A_t = \{x \in \mathbb{R} : xt \leqslant 2\}$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wyznaczyć $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} A_t$ oraz $\bigcap\limits_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} A_t$.

47. Niech $\{A_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorów. Udowodnić następujące związki, zwane prawami de Morgana dla rodziny zbiorów:

a) $\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right)' = \bigcap\limits_{t\in T} A_t'$,

b) $\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right)' = \bigcup\limits_{t\in T} A_t'$.

48. Pokazać, że $A \cap \bigcup\limits_{t\in T} A_t = \bigcup\limits_{t\in T} (A \cap A_t)$.

49. Udowodnić, że $A \cup \bigcap\limits_{t\in T} A_t = \bigcap\limits_{t\in T} (A \cup A_t)$ oraz $A \cap \bigcap\limits_{t\in T} A_t = \bigcap\limits_{t\in T} (A \cap A_t)$.

50. Pokazać, że

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \setminus A = \bigcup_{t\in T} (A_t \setminus A).$$

51. Udowodnić następujące związki:

a) $A \times \bigcup\limits_{t\in T} A_t = \bigcup\limits_{t\in T} (A \times A_t)$,

b) $A \times \bigcap\limits_{t\in T} A_t = \bigcap\limits_{t\in T} (A \times A_t)$.

Podać „prawostronne” odpowiedniki powyższych wzorów.

52. Pokazać, że jeśli $A_t \subset B$ dla każdego $t \in T$, to $\bigcup\limits_{t\in T} A_t \subset B$.

53. Niech $B \subset A_t$ dla każdego $t \in T$. Pokazać, że $B \subset \bigcap\limits_{t\in T} A_t$.

Część B

Udowodnić następujące własności różnicy symetrycznej:

54. $A \triangle B = B \triangle A$ (przemienność).

55. $(A \triangle B)' = A' \triangle B = A \triangle B'$.

56. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (łączność).

57. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (rozdzielność mnożenia względem różnicy symetrycznej).

58. $A \triangle A = \emptyset$.

59. $A \triangle (A \triangle B) = B$.

60. $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$.

61. $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

62. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \triangle B$.

63. Udowodnić, że

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n).$$

64. Pokazać, że jeżeli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującym ciągiem zbiorów, tzn. $A_n \subset A_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ dla $n = 2, 3, \ldots$, to zbiory B_n są parami rozłączne, a ponadto

a) $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$,

b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

65. Udowodnić, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są zstępującymi ciągami zbiorów, to

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

66. Udowodnić, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są wstępującymi ciągami zbiorów, to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Część C

67. Udowodnić, że:

a) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \triangle \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \triangle B_i)$,

b) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \triangle \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \triangle B_i)$.

68. Udowodnić, że jeśli $A_n \subset A_0$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to

$$A_0 = (A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

69. Udowodnić, że jeżeli $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, to

$$(A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \setminus [(A_0 \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots].$$

70. Pokazać, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n).$$

71. Wykazać, że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right].$$

72. Pokazać, że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ A_n \setminus \left[A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \right] \right\}.$$

73. Udowodnić, że

$$\left(\bigcup_{s \in S} A_s \right) \cap \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right) = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{t \in T} (A_s \cap B_t).$$

Granicą górną ciągu zbiorów $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy zbiór

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n+m} \right),$$

granicą dolną zaś tego ciągu nazywa się zbiór

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} A_{n+m} \right).$$

Jeżeli $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n = A = \liminf\limits_{n \to \infty} A_n$, to mówimy, że *ciąg zbiorów* $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *jest zbieżny* do zbioru A i piszemy $A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

Zbiór A nazywamy *granicą ciągu* $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

74. Niech $A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Wyznaczyć granicę dolną i górną ciągu zbiorów $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Czy ciąg ten jest zbieżny?

75. Wyznaczyć granicę dolną i górną ciągu zbiorów z zad. 44 i rozstrzygnąć, czy ciąg ten ma granicę.

76. Pokazać, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \to \infty} A_n \subset \limsup_{n \to \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

77. Pokazać, że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest wstępującym ciągiem zbiorów, to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

78. Pokazać, że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów, to

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

79. Udowodnić, że

a) $$\limsup_{n \to \infty} A_n = \left\{ x : \bigwedge_{n} \bigvee_{m \geqslant n} x \in A_m \right\},$$

b) $$\liminf_{n \to \infty} A_n = \left\{ x : \bigvee_{n} \bigwedge_{m \geqslant n} x \in A_m \right\}.$$

80. Udowodnić, że są spełnione następujące równości:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cup \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$,

b) $\liminf\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \cap \liminf\limits_{n\to\infty} B_n$.

81. Udowodnić, że

a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cap \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$,

b) $\liminf\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) \supset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \cup \liminf\limits_{n\to\infty} B_n$.

Pokazać na przykładach, że w powyższych zależnościach inkluzji nie można na ogół zastąpić równościami.

82. Wykazać, że

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} A'_n = \left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right)'$,

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \left(\limsup\limits_{n\to\infty} A'_n\right)'$.

83. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \triangle A) = \emptyset$.

84. Wykazać, że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, to

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = A \cup B$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = A \cap B$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \setminus B_n) = A \setminus B$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \triangle B_n) = A \triangle B$.

ROZDZIAŁ III

NIEKTÓRE WŁASNOŚCI ZBIORU LICZB RZECZYWISTYCH

Przyjmiemy następujące definicje.

Definicja 1. *Zbiór A nazywać będziemy zbiorem przeliczalnym, jeżeli wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg.*

Definicja 2. *Zbiór, który nie jest przeliczalny, będziemy nazywać zbiorem nieprzeliczalnym.*

Część A

1. Pokazać, że zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ oraz zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ są zbiorami przeliczalnymi.

2. Udowodnić, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

3. Pokazać, że przedział $(0, 1)$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. Wywnioskować stąd, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

4. Udowodnić, że zbiór wszystkich ciągów (nieskończonych) o wyrazach 0 lub 1 jest zbiorem nieprzeliczalnym.

5. Udowodnić, że suma skończonej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

6. Pokazać, że zbiór liczb niewymiernych jest zbiorem nieprzeliczalnym.

7. Dowieść, że każda rodzina złożona z przedziałów otwartych i rozłącznych w $\mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalna (tzn., że jest skończona lub przeliczalna).

8. Pokazać, że iloczyn kartezjański skończonej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

9. Pokazać, że zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie (z układem współrzędnych) o obydwu współrzędnych wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

10. Bezwzględną wartością liczby $x \in \mathbb{R}$ nazwiemy liczbę $|x|$ określoną wzorem

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Pokazać, że:

a) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$,

b) $|x| \geqslant 0$,

c) $\sqrt{x^2} = |x|$,

d) $|xy| = |x|\,|y|$,

e) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ o ile $y \neq 0$,

f) jeżeli $a > 0$, to:
$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$,

g) jeżeli $a \geqslant 0$, to:
$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$,

h) jeżeli $a \geqslant 0$, to:
$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ lub $x > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

oraz

$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a$ lub $x \geqslant a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$,

i) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$,

j) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$.

11. Dla zadanej liczby $x \in \mathbb{R}$ określmy liczbę $[x]$ w następujący sposób:
$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$.
Liczbę $[x]$ będziemy nazywać *cechą* (lub *częścią całkowitą*) liczby x. Pokazać, że $[x] \leqslant x < [x]+1$.

12. Dla liczby $x \in \mathbb{R}$ określmy
$[x]^* = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geqslant x\}$.
Pokazać, że $[x]^* = -[-x]$.

13. Naszkicować wykresy następujących funkcji:

a) $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = [x]^*$, $x \in \mathbb{R}$,

c) $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$,

d) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

e) $f(x) = [x]^* - [x]$, $x \in \mathbb{R}$.

14. Dla $x \in \mathbb{R}$ niech $f(x) = \min\{x - [x], [x]^* - x\}$ (odległość liczby x od najbliższej liczby całkowitej). Naszkicować wykres funkcji f.

15. Sprawdzić słuszność wzorów:

$$\max\{x, y\} = \frac{|x-y| + x + y}{2},$$

$$\min\{x, y\} = \frac{x + y - |x-y|}{2}$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

16. Sprawdzić, czy następujące liczby są wymierne czy niewymierne:

a) 0,101001000100001...

b) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$,

c) $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$,

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

17. Pokazać, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz (jeżeli ma sens) liczb wymiernych jest liczbą wymierną.

18. Niech p oznacza dowolną liczbę pierwszą. Pokazać, że $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

19. Pokazać, że suma (różnica) liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną.

20. Pokazać, że iloczyn liczby wymiernej (różnej od zera) i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

21. Pokazać, że jeżeli x jest liczbą niewymierną dodatnią, to $\sqrt{x}$ też jest liczbą niewymierną.

22. Czy suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb niewymiernych musi być liczbą niewymierną?

23. Niech p, q będą dwiema różnymi liczbami pierwszymi. Pokazać, że liczby $\sqrt{p\cdot q}$ oraz $\sqrt{p}-\sqrt{q}$ są niewymierne.

24. Sprawdzić, czy następujące liczby są wymierne czy niewymierne:

a) $\sqrt{2}$, **b)** $\sqrt{2}-1$, **c)** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$,

d) $\sqrt[4]{2}$, **e)** $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, **f)** $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,

g) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot(7+4\sqrt{3})$.

25. Zbadać ograniczoność oraz wyznaczyć kresy zbiorów:

$A=\{x\in\mathbb{R}: |2x+3|+|x+3|-x<6\}$,

$B=\{x\in\mathbb{R}: |x^3-1|<x^2+x+1\}$,

$C=\{x\in\mathbb{R}: \log_2|x+2|<3\}$,

$D=\{x\in\mathbb{R}: \big||x-1|-1\big|<1\}$.

26 Niech $A=\left\{\dfrac{m}{n}: m,\, n\in\mathbb{N},\, m<n\right\}$. Wyznaczyć kresy zbioru A.

27. Wyznaczyć kresy zbioru $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

28. Wyznaczyć kres górny zbioru $A = \{\log_{10} 10 \sqrt[n]{10} : n \in \mathbb{N}\}$.

29. Wyznaczyć $\inf A$ oraz $\max A$, gdzie

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ i } \sin\frac{1}{x} = 0\right\}.$$

30. Wyznaczyć kresy zbioru $A = \{0,1;\ 0,11;\ 0,111;\ \ldots\}$.

31. Niech $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}\right\}$. Wyznaczyć $\sup A$ i $\inf A$.

32. Zbadać ograniczoność oraz wyznaczyć (jeżeli istnieją) kresy następujących zbiorów:

$$A = \left\{k + \frac{1}{n} : k \in \{0, 1, 2\}, n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 < 0\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 5| < 3\},$$
$$D = \left\{1 + \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$E = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$F = \{x \in \mathbb{R} : \log_2 \big||x| - 1\big| < 2\},$$
$$G = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N}\},$$
$$H = \left\{\frac{n^2 + 2n - 3}{n + 1} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

33. Wyznaczyć kresy zbiorów:

$$A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$B = \left\{\frac{n}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Część B

34. Pokazać, że w każdym przedziale (a, b) znajduje się przynajmniej jedna liczb wymierna.

35. Opierając się na twierdzeniu z zad. 34 udowodnić, że w każdym przedziale (a, b) znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych.

36. Pokazać, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami wymiernymi znajduje się liczba niewymierna. Wywnioskować stąd, że w każdym przedziale (a, b) znajduje się nieskończenie wiele liczb niewymiernych.

37. Niech x, $x \in (0, 1)$, będzie liczbą niewymierną. Czy liczba $\sqrt{1-x^2}$ musi być liczbą niewymierną?

38. Udowodnić, że następujące liczby są liczbami niewymiernymi:
a) $\log_2 3$, **b)** $\log_2 6$, **c)** $\log_2 7$, **d)** $\operatorname{tg} 15°$, **e)** $\operatorname{tg} 5°$.

39. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\sqrt{n(n+1)}$ jest niewymierna.

40. Pokazać, że liczba $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ jest niewymierna dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

41. Udowodnić, że suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

42. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Pokazać, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach należących do A jest zbiorem przeliczalnym.

43. Pokazać, że zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

44. *Zbiorem Cantora* nazywamy zbiór tych liczb z przedziału $[0, 1]$, które w rozwinięciu trójkowym mają tylko cyfry 0 lub 2.

Pokazać, że zbiór Cantora jest zbiorem nieprzeliczalnym.

45. Zbadać, czy następujące zbiory są ograniczone, a jeśli tak, to wyznaczyć ich kresy:

$$A = \{x \sin x : x \geqslant 0\},$$

$$B = \left\{\frac{1}{x} \sin x : x > 0\right\}.$$

46. Wyznaczyć kresy zbiorów:

$$A = \left\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\},$$

$$B = \left\{\frac{x}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\right\}.$$

47. Niech a, b będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Wyznaczyć kresy zbioru $A = \{a \sin x + b \cos x : x \in \mathbb{R}\}$.

48. Udowodnić, że następujące zbiory są ograniczone:

$$A = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$B = \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$C = \left\{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

49. Pokazać, że zbiór $A = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} : n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ jest ograniczony.

Wskazówka: Wykorzystać nierówność

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

50. Wykazać, że zbiór

$$A = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

jest ograniczony.

Wskazówka: Wykorzystać nierówność $\frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$, dla $n \geqslant 10$ oraz zad. 34, rozdz. I.

51. Wyznaczyć kresy zbiorów $A_k = \left\{ \frac{kn}{1+k+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Następnie zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

52. Dla $A, B \subset \mathbb{R}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ oznaczmy:

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$,

$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$.

Wykazać, że jeśli zbiory A, B są niepuste i ograniczone z góry oraz $\lambda \geqslant 0$, to zbiory $A + B$, λA są też ograniczone z góry i $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

53. Niech zbiór $A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry (z dołu) oraz $\lambda < 0$. Pokazać, że zbiór λA jest ograniczony z dołu (z góry) oraz $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$ ($\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$).

54. Niech $B \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym. Utwórzmy zbiór $C = \{|x| : x \in B\}$. Pokazać, że zbiór C jest ograniczony oraz, że $\sup C = \max\{|\sup B|, |\inf B|\}$.

55. Niech $A, B \subset [0, +\infty)$ będą zadanymi zbiorami. Utwórzmy zbiór $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Pokazać, że:

a) $\inf(A \cdot B) = (\inf A)(\inf B)$,

b) $\sup(A \cdot B) = (\sup A)(\sup B)$ o ile A i B są ograniczone z góry.

56. Rozważmy relację równoważnościową S określoną w zbiorze $\mathbb{R}$ w następujący sposób:

$x, y \in \mathbb{R}$, $xSy \Leftrightarrow x - y$ jest liczbą wymierną.

Pokazać, że każda klasa abstrakcji na tle relacji S jest zbiorem przeliczalnym oraz, że $\mathbb{R}/S$ jest rodziną nieprzeliczalną.

Część C

57. Pokazać, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\left|\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2}\right| \leqslant |a-b|.$$

58. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jest spełniona nierówność, zwana *nierównością Schwarza*

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\,.$$

59. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, z których przynajmniej jedna jest różna od zera i niech $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi równocześnie dodatnimi lub ujemnymi. Pokazać, że

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\right)^2 < \frac{a_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2}{b_2^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n^2}.$$

60. Pokazać, że jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dowolnymi liczbami dodatnimi, to

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2} + \frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^3}{x_{n-1}^2+x_{n-1}x_n+x_n^2} +$$
$$+ \frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{3}.$$

61. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, x \in \mathbb{R}$ jest spełniona nierówność

$$|x+x_1+x_2+\ldots+x_n| \geqslant |x| - (|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|).$$

62. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

63. Pokazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi

$$[2a] = [a] + \left[a + \frac{1}{2}\right].$$

64. Udowodnić, że $\frac{1}{2n} < \sqrt[n]{2} - 1 \leqslant \frac{1}{n}$, dla $n \in \mathbb{N}$.

65. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n oraz dla każdej liczby $x \in (0, 1)$ istnieje liczba całkowita k taka, że $\frac{n^2}{n+1} \leqslant kx < n$.

66. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb niewymiernych w przedziale $(0, 1)$. Pokazać, że $A + A = (0, 2)$.

67. Niech x będzie dowolną liczbą niewymierną. Pokazać, że istnieje $n < 1000$ takie, że wśród ułamków o mianowniku n znajduje się ułamek przybliżający x z dokładnością $\frac{1}{1000n}$.

68. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $(\sqrt{2}-1)^n$ jest liczbą niewymierną.

69. Rozstrzygnąć, czy liczba $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ jest liczbą wymierną.

70. Pokazać, że dla każdej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, $q > 0$, mamy $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2}$.

71. Niech $x \in (0,1)$ i niech $x = 0,c_1c_2c_3\ldots$ będzie rozwinięciem dziesiętnym liczby x. Utwórzmy funkcję $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ określoną następująco:

$f(x) = 0,c_2c_3c_4\ldots$

Naszkicować wykres funkcji f.
Wskazówka: Wyrazić $f(x)$ za pomocą cechy liczby.

72. Nazwijmy *liczbą algebraiczną* każdą liczbę rzeczywistą, która jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach wymiernych.

Pokazać, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.
Wskazówka: Skorzystać z zad. 44.

73. Wyznaczyć $\inf\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} : n,m \in \mathbb{N}\right\}$.

74. Pokazać, że zbiór $A = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$ jest ograniczony.

75. Niech $\{a_n\}$ będzie zadanym ciągiem liczbowym i niech $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Pokazać, że:

a) jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym i ograniczonym z góry, to $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n$ oraz $\inf A = a_1$,

b) jeżeli $\{a_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu, to $\sup A = a_1$, $\inf A = \lim_{n\to\infty} a_n$.

76. Wyznaczyć kresy zbioru $A = \left\{\frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : n,m \in \mathbb{N}\right\}$.

77. Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $Z_k = \left\{ \frac{k}{nk+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Wyznaczyć kresy zbioru Z_k,

b) wyznaczyć kresy zbioru $\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$.

78. Wyznaczyć kresy zbioru

$$A = \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)}{\sum_{k=1}^{n} k^3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

79. Udowodnić następujące *twierdzenie Dirichleta*:

Niech x będzie liczbą niewymierną. Wtedy dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją takie liczby całkowite p, q, że $1 \leqslant q \leqslant n$ oraz $|xq-p| \leqslant \frac{1}{n}$.

80. Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi, których suma jest równa 1. Wykazać, że jeżeli a^3 i b^3 są liczbami wymiernymi, to a i b też są liczbami wymiernymi.

81. Dane są liczby niewymierne dodatnie a, b, c, d, przy czym $a+b = 1$. Udowodnić, że $c+d = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$[na]+[nb] = [nc]+[nd].$$

Uwaga: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x (por. zad. 11).

82. Rozstrzygnąć, czy w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ istnieje nieprzeliczalny łańcuch (ze względu na relację inkluzji).

Uwaga: *Łańcuchem* w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ (ze względu na relację inkluzji) nazywamy każdą rodzinę K podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ taką, że dla dowolnych dwóch zbiorów $A, B \in K$ mamy, że $A \subset B$ lub $B \subset A$.

ROZDZIAŁ IV

ODWZOROWANIA I ICH WŁASNOŚCI

W tym rozdziale jak również w pozostałych, terminy odwzorowanie i funkcja będą używane zamiennie.

Przyjmiemy również następujące definicje.

Definicja 1. *Niech D będzie niepustym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$. Funkcję $f: D \to \mathbb{R}$ będziemy nazywać funkcją rosnącą (na zbiorze D), jeżeli*

$$t_1 < t_2 \to f(t_1) \leqslant f(t_2)$$

dla dowolnych $t_1, t_2 \in D$.

Jeżeli natomiast

$$t_1 < t_2 \to f(t_1) < f(t_2)$$

dla $t_1, t_2 \in D$, to funkcję f będziemy nazywać ściśle rosnącą.

Podobnie określamy funkcję malejącą i ściśle malejącą.

Definicja 2. *Funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ nazywa się funkcją okresową, jeżeli istnieje liczba $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, taka, że*

1° *jeśli $x \in D$, to $x+s, x-s \in D$ oraz*

2° $f(x+s) = f(x)$ *dla każdego $x \in D$.*

Wówczas każda liczba s o powyższej własności nazywa się okresem funkcji f.

Definicja 3. *Jeżeli wśród wszystkich okresów dodatnich danej funkcji okresowej istnieje najmniejszy, to nazywamy go okresem podstawowym tej funkcji.*

Jeżeli natomiast wśród okresów dodatnich nie ma najmniejszego, to funkcję tę nazywamy mikrookresową.

Część A

1. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{dla } x \neq -2 \\ 2 & \text{dla } x = -2. \end{cases}$$

a) Sprawdzić, czy f jest surjekcją.

b) Czy f jest różnowartościowa?

c) Jeżeli f jest bijekcją, to wyznaczyć f^{-1}.

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określona następująco:

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{dla } x\in\mathbb{R},\ x\neq -1,\ x\neq 0\\ 3 & \text{dla } x=-1\\ 1 & \text{dla } x=0.\end{cases}$$

Pokazać, że f jest bijekcją oraz wyznaczyć f^{-1}

3. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f(x)=(x+2,\ 2x+1)$. Sprawdzić, czy f jest surjekcją oraz injekcją. Wyznaczyć (jeżeli istnieje) f^{-1}.

4. Dane jest odwzorowanie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, określone wzorem $f(x,y)=$ $=(x+2y,xy)$. Sprawdzić, czy f jest injekcją oraz surjekcją.

5. Sprawdzić, czy funkcja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ określona wzorem $f(x,y)=$ $=(x+2y,x)$ jest bijekcją. Wyznaczyć f^{-1}.

6. Wyznaczyć (jeżeli istnieje) funkcję odwrotną do funkcji $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\log_x 2$.

7. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie zadana następująco:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{dla } x<0\\ x & \text{dla } x\in[0,1)\\ 2x-1 & \text{dla } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Zbadać, czy f jest bijekcją, a jeżeli tak, to wyznaczyć f^{-1}.

8. Pokazać, że funkcja $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, jest funkcją nieparzystą, ściśle rosnącą na przedziale $[1,\infty)$ oraz ściśle malejącą na przedziale $(0,1]$.

9. Niech $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & \text{dla } x<1\\ 3 & \text{dla } x=1\\ x^2+2x+1 & \text{dla } x>1.\end{cases}$$

a) Sprawdzić, czy g jest różnowartościowa,
b) wyznaczyć $g(\mathbb{R})$,
c) wyznaczyć g^{-1},
d) obliczyć $\sup\limits_{x\in[-5,1]} g(x)$.

10. Niech $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi wzorami $f(x,y)=2x-y$ i $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$. Utworzyć $g\circ f$.

11. Niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi wzorami $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < 1 \\ x^2+x & \text{dla } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Utworzyć $g \circ f$.

12. Utworzyć możliwe złożenia funkcji $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ określonych wzorami $f(x, y) = xy + x^2$ i $g(x) = (x, \sin x)$.

13. Niech f, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będą funkcjami zdefiniowanymi wzorami $f(x, y) = (x+2y, x-y^2)$ i $g(x, y) = (x-y, xy)$. Wyznaczyć funkcję $g \circ f$.

14. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będą funkcjami określonymi wzorami $f(x) = (x-2, x^2)$ i $g(x, y) = (x-y, x+y)$. Utworzyć złożenie tych funkcji.

15. Pokazać, że złożenie dwóch funkcji różnowartościowych jest funkcją różnowartościową.

16. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą funkcjami zdefiniowanymi wzorami $f(x, y) = (x+y, x-2y+3)$ oraz $g(x, y) = x-y$. Utworzyć funkcję $h = g \circ f$ oraz wyznaczyć i naszkicować zbiór $h^{-1}([1, 3])$.

17. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \big||x-1|-2\big|$. Wyznaczyć zbiór $f^{-1}((-\infty, 2))$.

18. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem zadanym wzorem $f(x, y) = x^2+y+1$. Wyznaczyć $f(A)$ oraz $f^{-1}(B)$, gdzie $A = [0, 1) \times [0, 1]$, $B = [1, 3)$. Zilustrować graficznie zbiór $f^{-1}(B)$.

19. Sprawdzić, czy funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, jest różnowartościowa. Wyznaczyć $f(\mathbb{R})$.

20. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ x^2+1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć $f(A)$, gdzie $A = [-1, 1) \cup \{2\}$.

21. Niech $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x + \dfrac{3}{2} & \text{dla } x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{dla } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Wyznaczyć $g(A)$ oraz $g^{-1}(B)$, gdzie $A = \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$, $B = (0, 1) \cup \{2\}$.

22. Zbadać, czy funkcja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określona wzorem $f(x, y) = (x+y, xy)$ jest injekcją i surjekcją. Wyznaczyć $f^{-1}(\{(1, 0)\})$.

23. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją określoną wzorem
$f(x, y) = (x-y, x^2+y^2)$.
Sprawdzić, czy f jest injekcją i surjekcją. Wyznaczyć $f^{-1}(\{(0, 2)\})$.

24. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x, y) = x-y$. Wyznaczyć $f^{-1}(B)$, gdzie $B = (1, 2]$ i zinterpretować ten zbiór geometrycznie.

25. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = 1+\dfrac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Wyznaczyć $\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $\inf\limits_{x\in B} f(x)$, gdzie $A = \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $B = (4, 5)$.

26. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $f(x) = 1+\sin x$. Wyznaczyć $f^{-1}(\{0, 1, 2\})$.

27. Dana jest funkcja $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \log_2(\sin x)$. Wyznaczyć $f(A)$, gdzie $A = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

28. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami zadanymi wzorami $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \sin x$. Wyznaczyć $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} (f \circ g)(x)$.

29. Pokazać, że jeśli f jest funkcją okresową, to $af+b$ (a, b — stałe) też jest funkcją okresową o tym samym okresie.

30. Wyznaczyć okres podstawowy funkcji $f(x) = x-[x]$.

31. Zbadać parzystość następujących funkcji: $f(x) = \sin x+\cos x$, $g(x) = x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$, $h(x) = \log\dfrac{x-1}{x+1}$.

32. Pokazać, że funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną,} \\ 1, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą wymierną,} \end{cases}$$

jest funkcją mikrookresową.
Uwaga. Funkcja f nosi nazwę *funkcji Dirichleta.*

33. Niech D, $D \subset \mathbb{R}$, będzie zbiorem symetrycznym względem zera i niech $f: D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różnowartościową i nieparzystą. Pokazać, że funkcja odwrotna $f^{-1}: f(D) \to \mathbb{R}$ jest funkcją nieparzystą.

34. Pokazać, że:

a) iloczyn dwóch funkcji nieparzystych lub parzystych jest funkcją parzystą,

b) iloczyn funkcji nieparzystej i parzystej jest funkcją nieparzystą,

c) suma dwóch funkcji parzystych (nieparzystych) jest funkcją parzystą (nieparzystą).

35. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną i niech A, B będą niepustymi podzbiorami zbioru X. Pokazać, że jeśli $A \subset B$, to $\sup_A f(x) \leqslant \sup_B f(x)$ oraz $\inf_A f(x) \geqslant \inf_B f(x)$.

Część B

36. Niech $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Wyznaczyć $f(A)$, gdzie $A = (0, 1]$.

37. Wyznaczyć $f^{-1}(B)$, gdzie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xy, x+y)$, a $B = \{1\} \times [0, 1]$.

38. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest zadana wzorem $f(x, y) = (y^2, x^2 - 2x - y)$. Wyznaczyć $f^{-1}(B)$, gdzie $B = \{1\} \times (2, \infty)$ oraz naszkicować ten zbiór na płaszczyźnie.

39. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi wzorami $f(x, y) = x + y$ oraz $g(x) = |x|$. Wyznaczyć funkcję $h = g \circ f$, a następnie wyznaczyć i naszkicować na płaszczyźnie zbiór $h^{-1}((0, 1])$.

40. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi następująco:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 2x+3 & \text{dla } x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 3 \\ -x-2 & \text{dla } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Utworzyć $g \circ f$.

41. Dane są funkcje f i g określone w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ -x+3 & \text{dla } x \in (1, 3], \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{dla } x \in [1, 3]. \end{cases}$$

Znaleźć $h = f \circ g$ oraz wyznaczyć $h^{-1}\left(\left(0, \frac{3}{2}\right]\right)$.

42. Niech f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi wzorami

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x < 0 \\ x+3 & \text{dla } x \geqslant 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Utworzyć $g \circ f$.

43. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Niech $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Wyznaczyć $f^{-1}(A)$ i podać ilustrację graficzną tego zbioru.

44. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x,y) = |x|$. Wyznaczyć $f^{-1}(A)$, gdzie $A = [0,1) \cup \{2\}$ oraz zinterpretować ten zbiór na płaszczyźnie.

45. Pokazać, że funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$. Wyznaczyć $f(\mathbb{R})$ i skonstruować funkcję odwrotną do f.

46. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją daną wzorem $f(x) = (x, 3x+1)$. Wyznaczyć $f(A)$, gdzie $A = (0,2)$.

47. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją daną wzorem $f(x) = (x, x^2-1)$. Wyznaczyć $f([0,1])$.

48. Dane są funkcje:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ -\sin x + 2 & \text{dla } x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}x & \text{dla } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 2 & \text{dla } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Utworzyć $h = g \circ f$ oraz znaleźć $h\left(\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\right)\right)$.

49. Niech $f, g: [0,1] \to [0,1]$ będą funkcjami określonymi następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{dla } x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ -2x+2 & \text{dla } x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Wyznaczyć $h = g \circ f$ oraz znaleźć $h^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2}, 1\right)\right)$.

50. Sprawdzić, czy funkcja $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, gdzie $a^2 + bc \neq 0$, jest odwrotna względem siebie.

51. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, przy czym $f(x,y) = (x+y, x-2y+3)$, $g(x,y) = x-y$. Utworzyć $h = g \circ f$ oraz wyznaczyć $h(A)$, gdzie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Wyznaczyć $\sup h(x,y)$.

52. Niech $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x,y) = |x|+|y|$. Dalej, niech $A_n = \left[-2, 1-\frac{1}{n}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć $f^{-1}(A_n)$ oraz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$.

53. Niech $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = (x, \sin x)$. Wyznaczyć $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. Podać interpretację geometryczną tego zbioru.

54. Niech $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x,y) = 2x+3y-1$. Wyznaczyć $\sup_A f(x, y)$ oraz $\inf_A f(x, y)$, gdzie $A = [0,1)\times(3,4]$.

55. Niech $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą funkcjami zadanymi wzorami $f(x,y) = (x+2y, -3x+6)$, $g(x,y) = xy$.

a) Pokazać, że f jest bijekcją i znaleźć f^{-1},

b) wyznaczyć $g\circ f$ oraz $g \circ f^{-1}$,

c) znaleźć $(g\circ f)(A)$, gdzie $A = [0,2)\times\{1\}$ oraz wyznaczyć $\sup_A (g\circ f)$ i $\inf_A (g\circ f)$.

56. Niech $f:D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie s. Pokazać, że funkcja $x \to f(ax)$, gdzie $a = \text{const}$ i $a \neq 0$, jest funkcją okresową o okresie $\frac{s}{a}$.

57. Wyznaczyć okresy podstawowe funkcji $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$.

58. Wyznaczyć okres podstawowy funkcji: $f(x) = \cos(2x-3)$, $g(x) = 1-\sin 2x$, $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $k(x) = |\sin x|+|\cos x|$.

59. Zbadać okresowość funkcji $f(x) =$ odległość x od najbliższej liczby całkowitej.
Wskazówka. Porównać zad. 14, rozdz. III.

60. Niech D będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$ symetrycznym względem zera i niech $f:D \to \mathbb{R}$. Pokazać, że f można przedstawić jako sumę funkcji parzystej oraz nieparzystej.

61. Pokazać, że funkcja $f(x) = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ jest nieparzysta.

62. Niech $f:D \to \mathbb{R}\,(D \subset \mathbb{R})$ oraz $g:f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Pokazać, że

a) jeżeli funkcje f i g są jednocześnie rosnące lub jednocześnie malejące, to $g\circ f$ jest funkcją rosnącą,

b) jeżeli f jest rosnąca, zaś g malejąca, to $g\circ f$ jest malejąca,

c) jeżeli f jest malejąca, zaś g jest rosnąca, to $g\circ f$ jest malejąca.

Część C

63. Udowodnić, że jeśli $f: X \to Y$, $A, B \subset X$, to:

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

Pokazać na przykładach, że nie można inkluzji zastąpić równością.

64. Niech $f: X \to Y$, $A \subset X$ oraz $B_1, B_2 \subset Y$. Pokazać, że

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$,
$A \subset f^{-1}(f(A))$.

65. Niech $f: X \to Y$. Pokazać, że f jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego $A \subset X$ jest prawdziwa implikacja:

$x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)$.

66. Pokazać, że $f: X \to Y$ jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $A = f^{-1}(f(A))$, dla każdego $A \subset X$.

67. Udowodnić, że $f: X \to Y$ jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ dla każdych $A, B \subset X$.

68. Niech $f: X \to Y$ i niech $\{A_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X zaś $\{B_s\}_{s \in S}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru Y.
Pokazać, że:

$$f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(A_t), \qquad f\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) \subset \bigcap_{t \in T} f(A_t),$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{s \in S} B_s\right) = \bigcup_{s \in S} f^{-1}(B_s), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{s \in S} B_s\right) = \bigcap_{s \in S} f^{-1}(B_s).$$

69. Pokazać, że jeżeli f i g są funkcjami różnowartościowymi (i można je złożyć), to $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

70. Niech $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ będą takimi funkcjami, że $g \circ f = i_X$, tzn. $g(f(x)) = x$ dla dowolnego $x \in X$. Pokazać, że f jest różnowartościowa i g jest surjekcją. Czy f i g muszą być bijekcjami?

71. Niech $f, g: A \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi z góry. Pokazać, że

$$\sup_{x \in A} [f(x) + g(x)] \leqslant \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x).$$

Czy znak nierówności można zastąpić równością?

72. Niech $f, g: A \to \mathbb{R}$ będą ograniczone z dołu. Pokazać, że:

$$\inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x) \leqslant \inf_{x \in A} [f(x) + g(x)].$$

73. Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie ograniczona z dołu. Pokazać, że
$$\sup_{x\in A}[-f(x)] = -\inf_{x\in A} f(x).$$

74. Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie ograniczona z góry zaś $g: A \to \mathbb{R}$ ograniczona. Udowodnić, że
$$\sup_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A}[f(x)+g(x)].$$

75. Niech $f, g: A \to \mathbb{R}$ będą ograniczone z góry. Pokazać, że
$$\left|\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)\right| \leqslant \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|.$$

76. Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie ograniczona z góry. Pokazać, że
$$\sup_{x\in A}[f(x)+C] = C + \sup_{x\in A} f(x),$$
gdzie $C = \text{const}$.

77. Niech $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Wyznaczyć
$$\sup_{(x,y)\neq(0,0)} f(x,y) \text{ i } \inf_{(x,y)\neq(0,0)} f(x,y).$$

78. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mającą tę własność, że jest ona ograniczona z góry na wszystkich podzbiorach $\mathbb{R}$ ograniczonych z góry. Pokazać, że funkcja $\bar{f}$, gdzie $\bar{f}(x) = \sup[f(y): y \leqslant x]$, jest funkcją rosnącą.

79. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\limits_{\alpha\in[0,1]}(x^2 - \alpha x)$. Wyznaczyć $f^{-1}(-1,1)$.

80. Niech $\mathscr{F}$ będzie rodziną funkcji określonych na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ o wartościach rzeczywistych, rosnących i wspólnie ograniczonych z góry na D (tzn. istnieje stała M taka, że $f(x) \leqslant M$ dla każdego $f \in \mathscr{F}$ i każdego $x \in D$). Pokazać, że funkcja $\tilde{f}: D \to \mathbb{R}$, określona w następujący sposób
$$\tilde{f}(x) = \sup_{f\in\mathscr{F}} f(x),$$
jest funkcją rosnącą na D. Sformułować analogiczne twierdzenie dla rodziny funkcji malejących.

81. Niech D będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$ oraz niech dane będą funkcje $x: D \to \mathbb{R}$ oraz $f: D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokazać, że:

a) jeżeli x jest funkcją rosnącą, zaś f jest funkcją rosnącą ze względu na każdą zmienną (malejącą ze względu na każdą zmienną), to funkcja $t \to f(t, x(t))$ jest funkcją rosnącą (malejącą),

b) jeżeli $f(t,x)$ jest rosnąca ze względu na t i malejąca ze względu na x (lub na odwrót), zaś funkcja x jest malejąca, to funkcja $t \to f(t, x(t))$ jest rosnąca (malejąca).

82. Skonstruować przykład funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest stała i której okresami są liczby 1 i $\sqrt{2}$.

83. Pokazać, że każda funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, której okresami są liczby 1 i $\sqrt{2}$, jest funkcją mikrookresową.

Uogólnić to twierdzenie pokazując, że każda funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, której okresami są liczby 1 i pewna liczba niewymierna s, jest funkcją mikrookresową. Wskazówka: Skorzystać z zad. 79, rozdz. III.

84. Pokazać, że każda funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która jest ciągła i mikrookresowa jest funkcją stałą.

85. Dowieść, że jeżeli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz istnieje $a\neq 0$ takie, że

$$\big(1-f(x)\big)f(x+a)=1+f(x)$$

dla każdego $x\in\mathbb{R}$, to f jest funkcją okresową.

86. Załóżmy, że $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ jest taką funkcją wypukłą, że $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=a\leqslant 0$. Niech $\phi(x)=g(x)/x$. Wykazać, że ϕ jest funkcją rosnącą. Udowodnić także, że teza pozostanie prawdziwa, jeżeli założymy, że funkcja $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ jest taką funkcją wypukłą, że $g(0)=a\leqslant 0$.

Uwaga: Niech I będzie przedziałem. Funkcję $f:I\to\mathbb{R}$ nazywamy *funkcją wypukłą*, jeżeli dla dowolnych $x,y\in I$ oraz $\alpha\in[0,1]$ jest spełniona nierówność

$$f\big(\alpha x+(1-\alpha)y\big)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

Jeżeli jest spełniona nierówność przeciwna, to funkcję f nazywamy *funkcją wklęsłą*.

87. Niech $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ będzie taką funkcją wklęsłą, że $f(0)=a\geqslant 0$. Pokazać, że funkcja f jest *podaddytywna* tzn.

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}_+$.

ROZDZIAŁ V

ELEMENTY TOPOLOGII W PRZESTRZENIACH METRYCZNYCH

Używać będziemy następujących oznaczeń:

$K(x,r)$ — kula otwarta o środku w punkcie x i promieniu r,
$\bar{K}(x,r)$ — kula domknięta o środku w punkcie x i promieniu r,
$S(x,r)$ — sfera o środku w punkcie x i promieniu r,
$\bar{A}$ — domknięcie zbioru A,
$\mathring{A}$ — wnętrze zbioru A,
A^d — pochodna zbioru A, tzn. zbiór wszystkich punktów skupienia tego zbioru,
$\operatorname{Fr} A$ — brzeg zbioru A,
$\operatorname{diam} A$ — średnica zbioru A,
$\operatorname{dist}(x,A)$ — odległość punktu x od zbioru A,
$\operatorname{dist}(A,B)$ — odległość zbiorów A i B,
$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych ze zwykłą metryką.

Część A

1. Niech X będzie zbiorem niepustym. Wprowadźmy funkcję $d: X \times X \to \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \neq y \\ 0 & \text{dla } x = y. \end{cases}$$

Pokazać, że d jest metryką w zbiorze X.
Uwaga. Metryka ta nazywa się *metryką dyskretną* albo *metryką 0–1*.

2. W przestrzeni X z metryką dyskretną wyznaczyć $K(x,r)$, $\bar{K}(x,r)$, $S(x,r)$ w następujących przypadkach:

1) $r \in (0,1)$, 2) $r = 1$, 3) $r > 1$.

3. Sprawdzić, czy funkcja $d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem $d(x,y) = |x^2 - y^2|$, jest metryką w zbiorze $\mathbb{R}$.

4. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różnowartościową. Pokazać, że wzór $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ definiuje metrykę w zbiorze $\mathbb{R}$.

5. Oznaczmy przez $\overline{\mathbb{R}}$ zbiór $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, gdzie $-\infty$ oraz $+\infty$ są pewnymi elementami nie należącymi do $\mathbb{R}$, różnymi między sobą. Weźmy funkcję $f: \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ określoną w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+|x|} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{dla } x = +\infty \\ -1 & \text{dla } x = -\infty. \end{cases}$$

a) Pokazać, że f jest bijekcją,

b) uzasadnić, że funkcja $d: \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|,$$

jest metryką w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$.

Uwaga. Zbiór $\overline{\mathbb{R}}$ z określoną wyżej metryką nazywa się *rozszerzoną prostą rzeczywistą.*

6. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, że funkcja $d_1: X \times X \to \mathbb{R}$ określona wzorem $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, jest też metryką w zbiorze X.

7. Sprawdzić, czy funkcja $d: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych) określona wzorem

$$d(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|,$$

jest metryką z zbiorze $\mathbb{N}$.

8. Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Rozważmy trzy funkcje $d_e, d_m, d_t: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, określone w następujący sposób:

Dla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ przyjmujemy

$$d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2},$$

$$d_m(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i - y_i|,$$

$$d_t(x, y) = \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|.$$

Pokazać, że wszystkie trzy funkcje d_e, d_m i d_t są metrykami w zbiorze $\mathbb{R}^k$.

Uwaga. Metryka d_e nazywa się *metryką euklidesową*, d_m — *metryką maksimum*, a d_t — *metryką taksówkową*.

9. Niech zbiór $\mathbb{N}$ będzie wyposażony w metrykę d określoną w zad. 7.

a) Pokazać, że $\mathbb{N}$ jest ograniczony i wyznaczyć diam $\mathbb{N}$,

b) znaleźć $K\left(2, \frac{1}{3}\right)$ i $\overline{K}\left(2, \frac{1}{3}\right)$,

c) pokazać, że każdy podzbiór zbioru $\mathbb{N}$ jest jednocześnie domknięty i otwarty,

d) wyznaczyć $\operatorname{Fr}\{n\in\mathbb{N}: n \geqslant 3\}$

e) czy $\mathbb{N}$ jest przestrzenią spójną?

10. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wyznaczyć $\bar{K}((0,0),1)$ oraz $S((1,2),2)$ zakładając kolejno, że $\mathbb{R}^2$ jest wyposażona w metrykę euklidesową, maksimum i metrykę taksówkową.

11. Niech $\bar{\mathbb{R}}$ będzie rozszerzoną prostą rzeczywistą (por. zad. 5).

a) Wyznaczyć $\operatorname{diam}[-1,1]$, $\operatorname{diam}(-1,+\infty)$, $\operatorname{diam}[-\infty,2)$,

b) wyznaczyć $K\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $S(1,1)$ oraz $\bar{K}\left(+\infty,\frac{3}{2}\right)$,

c) znaleźć $\operatorname{dist}(A,B)$, gdzie $A=(-\infty,0)$, $B=[2,+\infty]$.

12. Sprawdzić, czy zbiór $A=\left\{x>0: \sin\frac{1}{x}=0\right\}$ jest zbiorem ograniczonym w $\mathbb{R}$. Jeżeli tak, to wyznaczyć jego średnicę.

13. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wyznaczyć $\operatorname{diam} A$, gdzie $A=[0,1]\times[0,1]$, kolejno w metryce euklidesowej, maksimum i taksówkowej.

14. Niech $A\subset\mathbb{R}^2$, $A=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$. Wyznaczyć $\operatorname{dist}((1,1),A)$ oraz $\operatorname{dist}((1,2),A)$ w metryce euklidesowej, maksimum i taksówkowej.

15. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (z metryką euklidesową) zadany jest zbiór $A=[-1,1]\times[-1,1]$. Wyznaczyć funkcję $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, określoną wzorem $f(r)=\operatorname{diam}(A\cap\bar{K}((2,0),r))$.

16. Wyznaczyć funkcję $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, określoną wzorem
$\varphi(r)=\operatorname{diam}(\bar{K}((0,0),1)\cap\bar{K}((1,0),r))$,
gdzie kule te są rozważane w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową.

17. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (z metryką maksimum) rozważmy zbiór $A=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$. Wyznaczyć funkcję $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $g(r)=\operatorname{diam}(A\cap K((1,1),r))$.

18. Wyznaczyć punkty domknięcia i punkty skupienia zbioru $A=\left\{n+\frac{1}{k}: n,k\in\mathbb{N}\right\}$ w przestrzeni metrycznej $\mathbb{R}$.

19. W przestrzeni $\mathbb{R}$ wyznaczyć pochodną zbioru $A=\left\{(-1)^n m+\frac{1}{n}: n,m\in\mathbb{N}\right\}$.

20. W przestrzeni $\mathbb{R}$ podać przykład takich dwóch zbiorów A i B, że wszystkie cztery zbiory $\bar{A}\cap\bar{B}$, $\overline{A\cap B}$, $\bar{A}\cap B$, $A\cap\bar{B}$ są różne między sobą.

21. W przestrzeni $\mathbb{R}$ wyznaczyć A^d oraz $\mathrm{Fr}A$, gdzie $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin\frac{1}{x} = 0\right\}$.

22. Wyznaczyć $\bar{C}$, C^d, $\mathrm{Fr}\,C$, gdzie $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ jest zbiorem w przestrzeni $\mathbb{R}$.

23. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Wyznaczyć A^d, $(A^d)^d$, $\left((A^d)^d\right)^d$.

24. Pokazać, że jeśli zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry oraz jeśli A nie ma maksimum, to $\sup A$ jest punktem skupienia zbioru A.

25. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową wyznaczyć punkty skupienia zbiorów:

$$A = \left\{\left((-1)^n, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x}, x > 0\right\},$$

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \text{ gdzie } C_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{n}\sin x\right\}.$$

26. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x, y) = (2x + y, x - y)$. Wyznaczyć punkty skupienia zbioru $f^{-1}(B)$, gdzie $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \times \{1\}$ (zakładamy, że w $\mathbb{R}^2$ jest metryka euklidesowa).

27. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x, y) = (x + 2y, x - y + 3)$. Wyznaczyć punkty domknięcia i punkty skupienia zbioru $f(A)$, gdzie $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \times \{1\}$ oraz w $\mathbb{R}^2$ jest metryka euklidesowa.

28. Wyznaczyć punkty domknięcia, skupienia i brzeg następujących zbiorów w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową:

$$A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}, 2(-1)^n + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = ([0, 1] \cup \{2\}) \times (0, 1),$$

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \text{ gdzie } C_n = \{(x, y) : y = nx \text{ i } x^2 + y^2 = 1\}.$$

29. Niech $A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{(-1)^n}{n}, \left||y - x^2| - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, oraz niech $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Wyznaczyć $\bar{A}$, A^d oraz $\mathring{A}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową.

30. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową wyznaczyć wnętrze zbioru $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie $A_n = \left\{(x, y) : n^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant n^2 + \frac{1}{n^2} + 2\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

31. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką maksimum wyznaczyć punkty domknięcia i punkty skupienia zbioru

$$A = \left\{(x,y): y = 2x + \frac{1}{n},\ n = 1,2,\ldots\right\}.$$

32. Wyznaczyć brzeg zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ w przestrzeni $\mathbb{R}$.

33. Wyznaczyć $\mathring{A}$, $\bar{A}$ oraz $\operatorname{Fr} A$, gdzie $A = \bigcup_{\lambda \geqslant 1} A_\lambda$, przy czym $A_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \lambda x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ oraz w $\mathbb{R}^2$ jest metryka maksimum.

34. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (z metryką taksówkową) są dane zbiory

$$A_n = \{(x,y): x \in [0,1],\quad y = x^n\},\ n \in \mathbb{N},\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Znaleźć $\bar{A}$. Czy A jest zbiorem domkniętym?

35. Pokazać, że w przestrzeni metrycznej z metryką dyskretną żaden zbiór nie ma punktów skupienia.

36. Udowodnić, że jeśli x jest punktem skupienia zbioru A, to w każdym otoczeniu punktu x znajduje się nieskończenie wiele punktów ze zbioru A.

37. Wyznaczyć punkty skupienia zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ w przestrzeni $\mathbb{R}$ oraz w rozszerzonej prostej rzeczywistej $\bar{\mathbb{R}}$.

38. Czy prawdą jest, że $\operatorname{Fr} \bar{K}(x,r) = S(x,r)$?

39. Czy prawdziwa jest równość $\overline{K(x,r)} = \bar{K}(x,r)$?

40. Udowodnić, że kula $K(x,r)$ w przestrzeni metrycznej (X,d) jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.

41. Udowodnić, że suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, zaś iloczyn skończonej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

42. Pokazać na przykładzie, że iloczyn nieskończonej ilości zbiorów otwartych nie musi być zbiorem otwartym.

43. Udowodnić, że A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie A' jest zbiorem domkniętym.

44. Udowodnić, że suma skończonej ilości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, a iloczyn dowolnej rodziny takich zbiorów jest też zbiorem domkniętym.

45. Pokazać na przykładzie, że suma nieskończonej rodziny zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym.

46. Udowodnić, że część wspólna skończonej ilości otoczeń danego punktu jest otoczeniem tego punktu.

47. Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym w przestrzeni metrycznej X z metryką d. Kulą o środku w zbiorze A i promieniu $r > 0$ nazwiemy zbiór $K(A,r)$ zdefiniowany następująco

$$K(A,r) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x,A) < r\}.$$

Pokazać, że $K(A,r) = \bigcup_{x \in A} K(x,r)$.

48. Pokazać, że $K(K(x,r_1),r_2) \subset K(x,r_1+r_2)$ (por. poprzednie zadanie). Pokazać na przykładzie, że inkluzji nie można na ogół zastąpić równością.

Część B

49. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej X,

a) Pokazać, że $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \operatorname{dist}(x,A) = 0$,

b) udowodnić, że $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ istnieje ciąg $\{x_n\} \subset A$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

50. Pokazać, że $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \bar{A}$, o ile A jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni metrycznej X.

51. Udowodnić, że $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\bar{A})$.

52. Niech A i B będą ograniczonymi podzbiorami przestrzeni metrycznej X. Pokazać, że jeśli $B \subset K(A,r)$, to $A \cap K(B,r) \neq \emptyset$ oraz $B \subset K(A \cap K(B,r),r)$ (por. zad. 47).

Udowodnić następujące własności domknięcia zbioru:

53. $A \subset \bar{A}$.

54. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

55. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

56. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

57. $\bar{A} \setminus \bar{B} \subset \overline{A \setminus B}$.

Czy w zad. 56 i 57 inkluzje można zastąpić równościami?

58. Pokazać, że jeśli G jest otwarty, to $\overline{G \cap A} = \overline{G \cap \bar{A}}$.

Uzasadnić następujące własności wnętrza zbioru:

59. $\mathring{A} \subset A$.

60. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

61. $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

62. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

63. $\overset{\circ}{\overbrace{A \setminus B}} = \mathring{A} \setminus \mathring{B}$.

Czy inkluzje w zad. 62 i 63 można zastąpić równościami?

64. Pokazać, że jeśli F jest domknięty, to $\overset{\circ}{\overbrace{F \cup \mathring{A}}} = \overset{\circ}{\overbrace{F \cup A}}$.

Udowodnić następujące własności brzegu zbioru:

65. $\operatorname{Fr} A$ jest zbiorem domkniętym.

66. $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$.

67. $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$.

68. $\mathring{A} = A \setminus \operatorname{Fr} A$.

69. $\bar{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$.

70. $\operatorname{Fr}(A') = \operatorname{Fr} A$.

71. $\operatorname{Fr} \bar{A} \subset \operatorname{Fr} A$.

Pokazać na przykładach, że w zad. 66, 67 i 71 inkluzji nie można zastąpić równościami.

72. Pokazać, że jeśli $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$, to $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$.

73. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej X. Udowodnić, że:

a) $\mathring{A} = X \setminus \overline{X \setminus A}$, **b)** $\bar{A} = X \setminus \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}$, **c)** $X \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}$.

Zbiór A będziemy nazywać *brzegowym* w przestrzeni metrycznej X, jeżeli $\mathring{A} = \emptyset$.

74. Pokazać, że:
A jest brzegowy $\Leftrightarrow \overline{X \setminus A} = X \Leftrightarrow A \subset \operatorname{Fr} A$.

75. Uzasadnić, że następujące trzy warunki są sobie równoważne:
a) A jest brzegowy,
b) każdy zbiór otwarty zawiera punkty nie należące do A,
c) A' jest zbiorem gęstym.

76. Pokazać, że zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{Q}'$ są brzegowe w $\mathbb{R}$.

77. Pokazać na przykładzie, że suma dwóch zbiorów brzegowych nie musi być zbiorem brzegowym.

78. Udowodnić, że suma dwóch zbiorów brzegowych, z których jeden jest zbiorem domkniętym, jest zbiorem brzegowym.

Zbiór, którego domknięcie jest zbiorem brzegowym w przestrzeni metrycznej X, nazywamy *zbiorem nigdziegęstym* w tej przestrzeni.

79. Pokazać, że A jest nigdziegęsty $\Leftrightarrow \mathring{\bar{A}} = \emptyset \Leftrightarrow X = \overline{X \setminus \bar{A}}$.

80. Udowodnić, że zbiór A jest nigdziegęsty $\Leftrightarrow$ w każdej kuli zawiera się kula nie mająca punktów wspólnych ze zbiorem A.

81. Pokazać, że zbiór nigdziegęsty jest zbiorem brzegowym ale nie na odwrót.

82. Udowodnić, że suma zbioru brzegowego i nigdziegęstego jest zbiorem brzegowym.

83. Przedział $[0,1]$ dzielimy na trzy równe części i usuwamy z niego środkowy przedział otwarty $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Każdy z dwóch pozostałych przedziałów $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ i $\left[\frac{2}{3},1\right]$ dzielimy na trzy równe części i usuwamy środkowe przedziały otwarte $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ i $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$. Kontynuujemy to postępowanie w nieskończoność.

Otrzymany w wyniku takiej konstrukcji podzbiór przedziału $[0,1]$ oznaczmy przez C.

a) Pokazać, że C pokrywa się ze zbiorem Cantora zdefiniowanym w zad. 44, rozdz. III,

b) uzasadnić, że C jest zbiorem domkniętym,

c) pokazać, że C jest zbiorem nigdziegęstym.

84. Pokazać, że rodziny kul $\{K(x,r)\}_{r>0}$, $\{\bar{K}(x,r)\}_{r>0}$ tworzą fundamentalne układy otoczeń punktu x.

85. Niech X będzie zbiorem niepustym i niech d_1, d_2 będą dwoma metrykami na zbiorze X. Metryki te będziemy nazywać *jednostajnie równoważnymi*, jeżeli istnieją liczby $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ takie, że

$$\alpha d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \beta d_1(x,y)$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

Pokazać, że w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ metryki: euklidesowa, maksimum i taksówkowa są jednostajnie równoważne (por. zad. 8).

86. Przyjmując definicję z poprzedniego zadania uzasadnić, że jeśli w przestrzeni metrycznej (X,d) wprowadzimy metrykę d_1 jak w zad. 6, to metryki d i d_1 nie są na ogół jednostajnie równoważne.

87. Niech d_1, d_2 będą metrykami jednostajnie równoważnymi na zbiorze X (zob. zad. 85) i niech x będzie dowolnie wybranym punktem przestrzeni X. Pokazać, że U jest otoczeniem punktu x w przestrzeni $(X,d_1) \Leftrightarrow$ jest otoczeniem punktu w przestrzeni (X,d_2). Wywnioskować stąd, że:

a) A jest otwarty w $(X, d_1) \Leftrightarrow A$ jest otwarty w (X, d_2),

b) A jest domknięty w $(X, d_1) \Leftrightarrow A$ jest domknięty w (X, d_2),

c) domknięcie, wnętrze, brzeg i pochodna zbioru A w przestrzeni (X, d_1) są takie same w przestrzeni (X, d_2),

d) A jest brzegowy (nigdziegęsty) w $(X, d_1) \Leftrightarrow A$ jest brzegowy (nigdziegęsty) w (X, d_2).

88. Niech (X_1, d_1) oraz (X_2, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi. W zbiorze $X = X_1 \times X_2$ wprowadzamy metrykę d, przyjmując

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

Pokazać, że $K((x_1, x_2), r) = K_1(x_1, r) \times K_2(x_2, r)$, gdzie kule te są brane w przestrzeniach X, X_1 oraz X_2, odpowiednio.

89. Pokazać, że przestrzeń z metryką $0-1$ jest zupełna.

90. Sprawdzić, czy zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ z metryką d określoną w zad. 7 jest przestrzenią metryczną zupełną.

91. Pokazać na przykładzie, że część wspólna zstępującego ciągu zbiorów spójnych nie musi być zbiorem spójnym.

92. Sprawdzić, czy część wspólna zstępującego ciągu zbiorów domkniętych i spójnych jest zbiorem spójnym.

93. Pokazać, że jeżeli z płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ usuniemy wszystkie punkty mające obie współrzędne wymierne, to powstały w ten sposób zbiór jest spójny (w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową).

Część C

94. Niech $C[a,b]$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $y = f(x)$, które są określone i ciągłe na przedziale $[a,b]$. Dla $f, g \in C[a,b]$ określamy

$$d(f,g) = \max_{x_2 \in [a,b]} \left\{ \min_{x_1 \in [a,b]} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - g(x_1))^2} \right\}.$$

Sprawdzić, czy d jest metryką w zbiorze $C[a,b]$.

95. Dowieść, że jeżeli A i B są ograniczonymi podzbiorami przestrzeni metrycznej X, to

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leqslant \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B + \operatorname{dist}(A, B).$$

96. Niech $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ będą ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, d). Określmy ciąg liczbowy $\{a_n\}$ przyjmując, że $a_n = d(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny.

97. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech A oznacza zbiór wszystkich ciągów Cauchy'ego w tej przestrzeni. Dla $\{x_n\}, \{y_n\} \in A$ określmy relację S następująco:

$$\{x_n\} S \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Pokazać, że S jest relacją równoważnościową.

98. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz niech $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem podzbiorów niepustych i ograniczonych w X takim, że $A_n \supset A_{n+1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$, A_n są domknięte oraz $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} A_n = 0$. Pokazać, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ składa się dokładnie z jednego punktu.
Uwaga. Twierdzenie zawarte w tym zadaniu nosi nazwę *twierdzenia Cantora* o ciągu zbiorów.

Zbiór, będący sumą przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych nazywamy *zbiorem typu F_σ*, zbiór zaś, będący iloczynem przeliczalnej ilości zbiorów otwartych — *zbiorem typu G_δ*.

99. Pokazać, że każdy zbiór otwarty jest zarówno zbiorem typu F_σ, jak i zbiorem typu G_δ.

100. Pokazać, że każdy zbiór domknięty jest zbiorem typu F_σ i zbiorem typu G_δ.

101. Udowodnić, że dopełnienie zbioru typu F_σ jest zbiorem typu G_δ i na odwrót.

102. Pokazać, że przedział postaci $[a, b)$ lub $(a, b]$ jest zbiorem typu F_σ i G_δ.

103. Pokazać, że zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest zbiorem typu F_σ, a zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{Q}'$ — zbiorem typu G_δ.

Zbiór, będący sumą co najwyżej przeliczalnej ilości zbiorów nigdziegęstych nazywamy *zbiorem I kategorii*. Zbiór, który nie jest I kategorii, nazywamy *zbiorem II kategorii*.

104. Pokazać, że zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest zbiorem I kategorii, ale nie jest nigdziegęsty (w przestrzeni $\mathbb{R}$).

105. Udowodnić następujące twierdzenie, zwane *twierdzeniem Baire'a*:
W przestrzeni metrycznej zupełnej każdy zbiór I kategorii jest brzegowy.

106. Udowodnić, że suma dwóch zbiorów I kategorii jest zbiorem I kategorii.

107. Pokazać, że przestrzeń metryczna zupełna jest zbiorem II kategorii.

108. Pokazać, że każdy przedział w $\mathbb{R}$ jest zbiorem II kategorii.

109. Pokazać, że dopełnienie zbioru II kategorii nie musi być zbiorem I kategorii.

110. Udowodnić, że zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{Q}'$ jest zbiorem II kategorii w $\mathbb{R}$.

111. Udowodnić, że zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{Q}'$ nie jest zbiorem typu F_σ oraz, że zbiór liczb wymiernych nie jest zbiorem typu G_δ (w przestrzeni $\mathbb{R}$).

112. Pokazać, że w przestrzeni metrycznej zupełnej dopełnienie zbioru I kategorii jest zbiorem II kategorii.

113. Zbiorem *rezydualnym* nazywamy zbiór, którego dopełnienie jest zbiorem I kategorii.

Pokazać, że w przestrzeni metrycznej zupełnej każdy zbiór rezydualny jest zbiorem II kategorii.

114. Pokazać na przykładzie, że w przestrzeni zupełnej nie każdy zbiór II kategorii jest rezydualny.

115. Udowodnić, że każdy zbiór rezydualny w przestrzeni metrycznej zupełnej jest gęsty w tej przestrzeni.

Będziemy mówić, że podzbiór A przestrzeni metrycznej X ma *własność Baire'a*, jeśli A może być przedstawiony w postaci

$$A = G \triangle P,$$

gdzie G jest pewnym zbiorem otwartym, zaś P jest zbiorem I kategorii.

116. Pokazać, że A ma własność Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy można go przedstawić w postaci $A = F \triangle Q$, gdzie F jest domknięty, Q zaś jest zbiorem I kategorii.

117. Pokazać, że każdy zbiór otwarty lub domknięty ma własność Baire'a, a także, że każdy zbiór I kategorii ma własność Baire'a.

118. Udowodnić, że dopełnienie zbioru mającego własność Baire'a ma własność Baire'a.

119. Udowodnić, że zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{Q}'$ mają własność Baire'a.

ROZDZIAŁ VI

CIĄGI LICZBOWE

Część A

1. Sprawdzić, czy następujące ciągi są monotoniczne i ograniczone:

a) $a_n = \frac{n}{2^n}$, **b)** $b_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2-3}$,

c) $c_n = \frac{2^n}{n!}$, **d)** $d_n = n^{(-1)^n}$.

2. Niech $\{a_n\}$ będzie zadanym ciągiem liczbowym i niech $\{b_n\}$ będzie ciągiem określonym następująco: $b_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Wykazać, że jeśli $\{a_n\}$ jest ograniczony (monotoniczny), to również $\{b_n\}$ jest ograniczony (monotoniczny).

3. Korzystając z definicji granicy udowodnić, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$, **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = \infty$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \log(\log n) = \infty$.

4. Pokazać, że jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, zaś $\{b_n\}$ ciągiem zbieżnym do zera, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

5. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}\sin(3n+1)$, **b)** $b_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^3+1}\cos n!$,

c) $c_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$.

6. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2}$,

b) $b_n = \dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$,

c) $c_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{6n^3-n^2+2n+1}$,

d) $d_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$,

e) $e_n = \dfrac{4\cdot 3^{n+1}+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^{n+2}}$,

f) $f_n = \dfrac{1}{n}\binom{n}{1} + \dfrac{1}{n^2}\binom{n}{2} + \dfrac{1}{n^3}\binom{n}{3}$,

g) $g_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$,

h) $h_n = \sqrt{n^4+n^2} - \sqrt{n^4-n^2}$,

i) $i_n = \dfrac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}$,

j) $j_n = \dfrac{\binom{n+2}{n}}{n^2}$,

k) $k_n = \dfrac{\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,

l) $l_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$,

m) $m_n = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

7. Wykorzystując twierdzenie o trzech ciągach wyznaczyć granice następujących ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{2\cdot 3^n+4\cdot 7^n}$,

b) $b_n = \sqrt[n]{3n+\sin n}$,

c) $c_n = \sqrt[n]{\dfrac{(-1)^n}{n}+2n}$,

d) $d_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$,

e) $e_n = n\left(\dfrac{1}{1+n^2} + \dfrac{1}{2+n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n^2}\right)$,

f) $f_n = \sqrt[n]{2 - \dfrac{(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}+\ldots+(-1)^{2n}}{n}}$.

8. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie równym 3 i o różnicy równej 2, $\{b_n\}$ zaś ciągiem geometrycznym, gdzie $b_1 = 2$ oraz iloraz jest równy 3. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n\log b_n}.$$

9. Niech $a_n = \binom{n^2}{2}$, $b_n = (1+2+\ldots+n)^2$, $n = 2, 3, \ldots$ Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

10. Dane są ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, gdzie $a_n = \binom{n+2}{n+1}$, $b_n = 2+4+\ldots+2n$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{b_n}$.

11. Obliczyć granicę ciągu $\{b_n\}$, $b_n = \frac{c_{n+1}-c_n}{c_{n+1}+c_n}$, gdzie $c_n = (2n)!$, $n = 1, 2, \ldots$

12. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n(n+1)^2}-\sqrt[3]{n(n-1)^2}\right)$.

13. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,

b) $b_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$,

c) $c_n = \frac{1+2-3+4+5-6+7+8-9+\ldots-3n}{n^2+n+1}$.

14. Niech $\{a_n\}$ będzie zadanym ciągiem takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, $q = \text{const}$. Pokazać, że jeżeli $q < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

15. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \frac{2^n}{n!}$,

b) $b_n = \frac{n^k}{C^n}$, gdzie k i C są stałymi, przy czym $k \in \mathbb{N}$, zaś $C > 1$.

16. Pokazać, że każdy ciąg rosnący i ograniczony od góry (malejący i ograniczony od dołu) jest zbieżny do granicy właściwej.

17. Pokazać, że ciąg $\{a_n\}$, gdzie

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$$

jest zbieżny. Oszacować granicę tego ciągu.

18. Niech $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$ Pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \leqslant 2$.

19. Udowodnić, że ciągi $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ oraz $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ są zbieżne i to do tej samej granicy (oznaczamy ją przez e i nazywamy *liczbą Eulera*).

20. Wykazać, że $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ dla $n = 1, 2, \dots$

21. Niech dane będą dowolne ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takie, że $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$. Pokazać, że

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

22. Wykazać, że następujące ciągi są zbieżne do zera:

a) $a_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$, b) $b_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Wskazówka. Skorzystać z zad. 14.

23. Pokazać, że $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Wskazówka. Skorzystać z zad. 66, rozdz. I.

24. Obliczyć granice następujących ciągów:

a) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$, b) $b_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$,

c) $c_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$ d) $d_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{\binom{n}{2}}$, $n \geqslant 2$,

e) $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

25. Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem ograniczonym. Tworzymy nowe ciągi $\{\alpha_n\}$ i $\{\beta_n\}$ przyjmując, że: $\alpha_n = \inf\{x_k : k \geqslant n\}$, $\beta_n = \sup\{x_k : k \geqslant n\}$, $n = 1, 2, \dots$

Pokazać, że ciągi $\{\alpha_n\}$ i $\{\beta_n\}$ są zbieżne (do granic właściwych).

Uwaga. Granicę $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ oznaczamy przez $\liminf_{n\to\infty} x_n$ i nazywamy granicą dolną ciągu $\{x_n\}$, zaś granicę $\lim_{n\to\infty} \beta_n$ oznaczamy przez $\limsup_{n\to\infty} x_n$ i nazywamy *granicą górną ciągu* $\{x_n\}$.

26. Pokazać, że dla dowolnego ciągu ograniczonego $\{a_n\}$ zachodzi: $\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$.

27. Wyznaczyć granice dolne i górne następujących ciągów:

a) $a_n = (-1)^n$, **b)** $b_n = (-1)^n[(-1)^n+1]$,

c) $c_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$, **d)** $d_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

28. Pokazać, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

29. Pokazać, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

30. Udowodnić, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ dla $n\in\mathbb{N}$, to $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty \left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty\right)$.

31. Udowodnić, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a\,(a\in\bar{\mathbb{R}})$, to każdy podciąg ciągu $\{a_n\}$ też jest zbieżny do a.

32. Zbadać, czy następujące ciągi są zbieżne:

a) $a_n = (-1)^n n$, **b)** $b_n = \dfrac{1}{n^3}\dbinom{n+1}{2}\sin(n!+n^2)$,

c) $c_n = 1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$, **d)** $d_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$.

33. Wyznaczyć granice podanych niżej ciągów:

a) $a_n = \dfrac{n^2+3n-1}{-2n^2+n}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$,

b) $b_n = n[\ln(n+3)-\ln n]$, **c)** $c_n = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)$,

d) $d_n = \sqrt{n^4-3n}\,(\sqrt[3]{1-n^3}+n)$, **e)** $e_n = \left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}}-1\right)n$,

f) $f_n = \dfrac{\sqrt{1+2+\ldots+n}}{n}$, **g)** $g_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$.

Część B

34. Pokazać, że jeżeli ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest zbieżny (do granicy właściwej lub niewłaściwej), to ma on wyraz najmniejszy lub największy.

35. Element $a \in \overline{\mathbb{R}}$ będziemy nazywać *punktem skupienia ciągu* $\{a_n\}$, jeżeli istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do a.

Pokazać, że jeżeli $\{a_n\}$ jest ograniczony, to wśród jego punktów skupienia istnieje największy i najmniejszy.

36. Pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie jeden punkt skupienia.

37. Pokazać, że jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, to liczby $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ oraz $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ są punktami skupienia tego ciągu.

38. Pokazać, że granica górna ciągu ograniczonego jest jego największym punktem skupienia, a granica dolna — najmniejszym.

39. Pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

40. Wyznaczyć granicę dolną i górną następujących ciągów:

a) $a_n = (-1)^n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$, **b)** $b_n = 1+2\cdot(-1)^{n+1}+3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

c) $c_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$, **d)** $d_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(-1)^n+\sin\dfrac{n\pi}{4}$,

e) $e_n = \dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{2n\pi}{4}$.

41. Niech $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ będą ciągami ograniczonymi. Pokazać, że:

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n+\liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} a_n+\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n+\limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n+\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

42. Pokazać na odpowiednich przykładach, że nierówności w zad. 41 mogą być ostre.

43. Udowodnić, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, to dla dowolnego ciągu ograniczonego $\{b_n\}$ są prawdziwe związki:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n+\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

44. Udowodnić, że ciąg $\{\sin n\}$ nie ma granicy.

45. Obliczyć: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

46. Niech liczby a_n i b_n spełniają zależność

$$a_n+b_n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n, \quad n = 1,2,\ldots$$

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

47. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 1+\sin^2 2+\ldots+\sin^2 n}{n}.$$

48. Niech a będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Określmy przez indukcję ciąg $\{a_n\}$:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n^2-2, \quad n = 1,2,\ldots$$

Dla jakich a ciąg ten jest ograniczony?

49. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right).$$

50. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

51. Korzystając z zad. 50 wyprowadzić wzór

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{Q_n}{n\cdot n!},$$

gdzie $Q_n\in(0,1)$, $n = 1,2,3,\ldots$

52. Pokazać, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ jest spełniona nierówność

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

53. Pokazać, że ciąg $\{x_n\}$, gdzie

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

jest zbieżny do granicy właściwej.
W s k a z ó w k a: Pokazać, że $\{x_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry.

54. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right),$$

gdzie a jest stałą dodatnią.

55. Udowodnić, że ciąg $\{x_n\}$, gdzie
$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n,$$
jest zbieżny do granicy właściwej.
Uwaga. Granica tego ciągu jest oznaczona przez γ i nazywana *stałą Eulera.* Pokazuje się, że $\gamma = 0{,}5772\ldots$

56. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right).$$

57. Obliczyć granicę ciągu $\{a_n\}$, gdzie
$$a_n = \frac{n}{e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}.$$

58. Obliczyć
$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right).$$

59. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right),$

b) $b_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}.$

60. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich zbieżnym do x. Obliczyć granicę:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n.$$

61. Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ będą zadanymi liczbami dodatnimi. Obliczyć
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n.$$

62. Ciąg $\{x_n\}$ jest określony w następujący sposób: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n(2-yx_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ (a oraz $y > 0$ są ustalone). Zbadać, dla jakich a ciąg jest zbieżny i wyznaczyć jego granicę.

63. Ciąg liczbowy $\{x_n\}$ jest określony w następujący sposób: $x_1 = a, x_2 = b$, $x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ $(n = 3, 4, \ldots)$, gdzie a oraz b są zadanymi liczbami.
Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Część C

64. Wyznaczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

65. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

66. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony następująco: $a_1 = \sqrt{x}$, $a_n = \sqrt{x\cdot a_{n-1}}$ $(n = 2,3,\dots)$, gdzie x jest pewną stałą dodatnią. Wyznaczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

67. Niech dany będzie ciąg $\{x_n\}$, gdzie $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \dots$, $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}, \dots$ Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

W s k a z ó w k a: Zauważyć, że $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n = 1,2,\dots$ Następnie pokazać, że $\{x_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry.

68. Wyznaczyć granicę ciągu $\{x_n\}$, gdzie $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, przy czym x_1 jest zadaną liczbą dodatnią.

69. Uzasadnić istnienie i znaleźć wartość granicy $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n x_n$, gdzie

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n},\ n = 1,2,\dots$$

70. Wyznaczyć $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, gdzie $\{x_n\}$ jest ciągiem z zad. 69.

71. Ciąg $\{x_n\}$ jest określony następująco:
$x_1 = 1$, $x_n = \dfrac{1}{1+x_{n-1}}$ $(n = 2,3,4,\dots)$. Obliczyć granicę tego ciągu.

72. Rozważmy ciąg $\{x_n\}$, gdzie x_1 jest zadaną liczbą, a $x_{n+1} = |x_n - 2^{-n}|$, $n = 1,2,3,\dots$ Przedyskutować zbieżność tego ciągu i wyznaczyć jego granicę.

73. Niech $x_1 = 1$ i niech $x_{n+1} = x_n^{1-\frac{1}{n}} - \dfrac{1}{ne}$, $n = 1,2,\dots$ Wykazać, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny oraz wyznaczyć jego granicę.

74. Pokazać, że liczba e jest liczbą niewymierną.

75. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ (g skończone lub nie), to również

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = g.$$

76. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich takim, że istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, przy czym $g \in \overline{\mathbb{R}}$. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = g$.

77. Pokazać na przykładach, że twierdzenia odwrotne do twierdzeń z zad. 75 i 76 nie są prawdziwe.

78. Pokazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = g$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$.

79. Udowodnić, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich, to prawdziwa jest implikacja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g.$$

Pokazać na przykładzie, że nie jest prawdziwa implikacja odwrotna.

80. Obliczyć granicę: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Wskazówka: Skorzystać z zad. 79.

81. Pokazać, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich spełnia warunek $a_{n+m} \leqslant a_n \cdot a_m$ dla $n, m = 1, 2, \ldots$, to ciąg $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ jest zbieżny (do granicy właściwej).

82. Wykazać, że jeżeli ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek

$$0 \leqslant x_{n+m} \leqslant x_n + x_m,$$

dla $n, m = 1, 2, \ldots$, to istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

83. Niech a i b będą ustalonymi liczbami nieujemnymi. Pokazać, że ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ określone w następujący sposób:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

(dla $n = 1, 2, \ldots$) mają wspólną granicę.

Uwaga. Granicę tę oznaczamy symbolem $\mu(a, b)$ i nazywamy *arytmetyczno-geometryczną średnią Gaussa liczb* a i b.

84. Niech $\{p_{nm}\}$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$ będzie zadanym ciągiem podwójnym o wyrazach nieujemnych takim, że $\sum\limits_{m=1}^{n} p_{nm} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} p_{nm} = 0$ dla każdego ustalonego $m \in \mathbb{N}$. Ponadto, niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do a. Pokazać, że ciąg $\{t_n\}$, gdzie $t_n = \sum\limits_{m=1}^{n} p_{nm} x_n$, jest także zbieżny do a.

Uwaga. Twierdzenie zawarte w tym zadaniu nosi nazwę *twierdzenia Teoplitza*.

85. Udowodnić następujące twierdzenie, zwane *twierdzeniem Stolza*: Jeżeli dane są dwa ciągi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, przy czym

1° $\{y_n\}$ jest ściśle rosnący,

2° $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$,

3° istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

86. Korzystając z twierdzenia Stolza (zad. 85) pokazać, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$,

gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną.

Rozdział VII

GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Uwaga. W zadaniach tego rozdziału symbol $\mathbb{R}$ będzie oznaczać zbiór liczb rzeczywistych z naturalną topologią.

Część A

Obliczyć granice:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4+3x^2-4}{x+1}$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}-8}{\sqrt[4]{x}-2}$.

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$.

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x(x+1)^2}-\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)$.

10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^3-3x^2+4}-x+2}{x^2-4}$.

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$.

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x-\cos x}$.

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos px-\cos qx}{x^2}$, gdzie p i q są stałymi.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cdot\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

22. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

24. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}\cdot\sin\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+2}\cdot\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

29. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

30. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

31. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

34. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

35. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}$.

36. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

37. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

38. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

39. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

40. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 y}{x^2+y^2}$.

41. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$.

42. Obliczyć granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach i rozstrzygnąć, czy funkcje te mają w tych punktach granice:

a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie $x = 0$,

b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1} + x$ w punkcie $x = 1$,

c) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ w punkcie $x = 2$,

d) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$ w punkcie $x = 1$,

e) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ w punkcie $x = 0$,

f) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}$ w punkcie $x = \dfrac{\pi}{2}$.

43. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x^2 & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1 \\ |x-1| & \text{dla} \quad |x| > 1, \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$

44. Pokazać, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, określona w następujący sposób:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

jest nieciągła w punkcie $(0,0)$.

45. Zbadać ciągłość funkcji $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, określonej wzorem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+x^n}.$$

46. Pokazać, że funkcja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}^2$.

47. Pokazać, że funkcja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, określona wzorem

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

jest nieciągła w punkcie $(x,y)=(0,0)$.

48. Pokazać, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, określona w następujący sposób

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \text{ niewymiernych} \\ 0 & \text{dla} \quad x \text{ wymiernych}, \end{cases}$$

jest nieciągła w każdym punkcie $x\in\mathbb{R}$.

49. Uzasadnić, że funkcja $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x \text{ wymiernych} \\ 0 & \text{dla} \quad x \text{ niewymiernych}, \end{cases}$$

jest ciągła tylko w punkcie $x=0$.

50. Dobrać $a\in\mathbb{R}$ tak, żeby funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ a & \text{dla} \quad x=0, \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

51. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określona następująco:

$$f(x)=\begin{cases} 2+e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x<0 \\ \dfrac{\sin ax}{x} & \text{dla } x>0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left(2+e^{\frac{1}{x}}\right) & \text{dla } x=0. \end{cases}$$

Dobrać a tak, żeby ta funkcja była ciągła na $\mathbb{R}$.

52. Dobrać parametry a, b, c tak, żeby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, określona w następujący sposób

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x} & \text{dla} \quad x<0\\[2mm] \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2} & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1\\[2mm] c & \text{dla} \quad x=1\\[2mm] \dfrac{x^2+(b-1)x-b}{x-1} & \text{dla} \quad x>1,\end{cases}$$

była ciągła na zbiorze $\mathbb{R}$.

53. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nieciągłej tylko na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Część B

54. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, gdzie $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ oznacza cechę liczby $\dfrac{1}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}}{x}$, **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$, **g)** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\log_{10}x-1}{x-10}$,

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$.

55. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}.$$

56. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

a) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$, $\quad x\in\mathbb{R}$,

b) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$, $\quad x\in\mathbb{R}$, $\quad$ gdzie $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad x>0\\ 0 & \text{dla} \quad x=0\\ -1 & \text{dla} \quad x<0,\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & \text{dla} \quad x \text{ wymiernych}\\ 0 & \text{dla} \quad x \text{ niewymiernych.}\end{cases}$

57. Niech $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w następujący sposób: jeśli x jest liczbą niewymierną, to $f(x)=0$; jeśli x jest liczbą wymierną, $x=\dfrac{p}{q}$

(zakładamy, że ułamek ten jest nieskracalny), to $f(x) = \frac{1}{q}$. Pokazać, że funkcja ta, zwana *funkcją Riemanna*, jest ciągła w punktach niewymiernych i nieciągła w punktach wymiernych.

58. Udowodnić, że każde równanie stopnia n nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, tzn. równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

59. Obliczyć następujące granice:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$, **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$,

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, **d)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

60. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

61. Niech $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$. Pokazać, że granice iterowane

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

istnieją i są równe 0, ale nie istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

62. Wykazać, że istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

ale nie istnieją granice iterowane

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right).$$

63. Zbadać ciągłość funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, określonej wzorem
$f(x) = [x] \sin \pi x$.

64. Pokazać, że jeśli funkcje $f, g: I \to \mathbb{R}$ są ciągłe (I oznacza przedział), to funkcje

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

też są ciągłe na I.

65. Niech $f: I \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, gdzie I jest przedziałem. Pokazać, że funkcja $\bar{f}: I \to \mathbb{R}$, określona wzorem

$$\bar{f}(x) = \sup\{f(t): t \leqslant x\},$$

jest ciągła i rosnąca na I.

66. Udowodnić, że funkcja $f: [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$, która jest ciągła na $[\alpha, +\infty)$ oraz która nie jest ograniczona ani z góry ani z dołu na tym przedziale, przyjmuje każdą wartość rzeczywistą nieskończenie wiele razy.

67. Niech I będzie przedziałem i niech $f: I \to \mathbb{R}$. Określmy funkcję $w: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ przyjmując, że

$$w(f, \varepsilon) = \sup\{|f(y) - f(x)|: x, y \in I, |x - y| \leqslant \varepsilon\},$$

dla $\varepsilon > 0$. Funkcję $\varepsilon \to w(x, \varepsilon)$ będziemy nazywać *modułem ciągłości* funkcji f.

Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła na I wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} w(f, \varepsilon) = 0$.

68. Wykazać, że jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$, to istnieją takie liczby $a \geqslant 0$ oraz $b \geqslant 0$, że $|f(x)| \leqslant a|x| + b$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

69. Pokazać, że funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x \sin x$, spełnia tezę twierdzenia z zad. 68, ale nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

70. Mówimy, że funkcja $f: I \to \mathbb{R}$ (I jest przedziałem, a nawet dowolnym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$) spełnia na I *warunek Lipschitza* ze stałą $L \geqslant 0$, jeżeli

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$$

dla $x, y \in I$.

Pokazać, że funkcja f spełniająca warunek Lipschitza na I jest jednostajnie ciągła na I.

71. Załóżmy, że $f: I \to \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że istnieją stałe $L \geqslant 0$ oraz $\alpha \in (0, 1]$ takie, że

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^{\alpha}.$$

O funkcji f mówimy wtedy, że spełnia *warunek Höldera* (ze stałą L i z wykładnikiem α).

Pokazać, że każda funkcja spełniająca warunek Höldera jest jednostajnie ciągła na I.

72. Zbadać, które z poniższych funkcji są jednostajnie ciągłe na podanych zbiorach:

a) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, **b)** $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$,

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$,

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$.

73. Dowieść, że każda funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}\,(a,b\in\mathbb{R})$, która jest jednostajnie ciągła na (a,b), ma skończone granice $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

74. Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a,+\infty)$, o wartościach w $\mathbb{R}$. Pokazać, że jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, to f jest jednostajnie ciągła na $[a,+\infty)$.

Część C

75. Niech (X_i,d_i) $(i=1,2,\ldots,n)$ będą przestrzeniami metrycznymi. W zbiorze $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ wprowadzamy metrykę d przyjmując, że dla $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in X$ mamy $d(x,y)=\max\{d_i(x_i,y_i):i=1,2,\ldots,n\}$. Następnie, niech (Y,d_Y) będzie przestrzenią metryczną. Załóżmy, że funkcje $f_i:Y\to X_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ są ciągłe na Y.

Pokazać, że funkcja $f:Y\to X$, określona wzorem

$$f(y)=\big(f_1(y),f_2(y),\ldots,f_n(y)\big)$$

jest ciągła na Y.

76. Niech (X,d_X) oraz (Y,d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi oraz niech $f:X\to Y$ będzie daną funkcją. Załóżmy, że $\{U_t\}_{t\in T}$ jest fundamentalnym układem otoczeń ustalonego punktu $x_0\in X$, zaś $\{V_s\}_{s\in S}$ jest fundamentalnym układem otoczeń punktu $f(x_0)$. Pokazać, że:

$$f \text{ jest ciągła w } x_0 \Leftrightarrow \bigwedge_{s\in S}\bigvee_{t\in T} f(U_t)\subset V_s.$$

77. Niech (X,d_X), (Y,d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi oraz niech $f:X\to Y$ będzie zadaną funkcją. Pokazać, że jeżeli w poniższej definicji ciągłości funkcji f w punkcie x_0

$$f \text{ ciągła w } x_0 \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{x\in X}\{d_X(x,x_0)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon\}$$

zastąpimy nierówność $d_X(x,x_0)<\delta$ nierównością $d_X(x,x_0)\leqslant\delta$ lub nierówność $d_Y\big(f(x),f(x_0)\big)<\varepsilon$ nierównością $d_Y\big(f(x),f(x_0)\big)\leqslant\varepsilon$, to otrzymane w ten sposób definicje są sobie równoważne.

78. Podać przykład funkcji, która ma własność Darboux, ale jest nieciągła.

79. Niech $f:X\to\mathbb{R}$ będzie zadaną funkcją, przy czym (X,d) jest przestrzenią metryczną. Dla $x\in X$ określmy

$$\omega_f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \sup \{ |f(y_1) - f(y_2)| : y_1, y_2 \in X, d(x, y_1) \leqslant \varepsilon, d(x, y_2) \leqslant \varepsilon \} \right\}.$$

Liczbę $\omega_f(x)$ będziemy nazywać *oscylacją* funkcji f w punkcie x. Pokazać, że f jest ciągła w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega_f(x) = 0$.

80. Niech $f: X \to \mathbb{R}$ (por. zad. 79). Dla dowolnie ustalonej liczby $\delta > 0$ rozważmy zbiór

$$A_\delta = \{x \in X : \omega_f(x) < \delta\}.$$

Pokazać, że A_δ jest zbiorem otwartym.

81. Niech, podobnie jak w zad. 79, f będzie zadaną funkcją odwzorowującą przestrzeń metryczną X w $\mathbb{R}$. Pokazać, że zbiór tych punktów przestrzeni X, w których funkcja f jest ciągła, jest zbiorem typu G_δ.

82. Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest ciągła tylko na zbiorze liczb wymiernych.

83. Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f: X \to Y$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

1) f jest ciągła na X,
2) przeciwobraz zbioru otwartego w Y jest zbiorem otwartym w X,
3) przeciwobraz zbioru domkniętego w Y jest zbiorem domkniętym w X,
4) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla dowolnego $A \subset X$,
5) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$ dla każdego $B \subset Y$.

84. Pokazać na przykładach, że jeśli $f: X \to Y$ jest ciągła na X (X, Y — przestrzenie metryczne), to obraz zbioru otwartego (domkniętego) w X nie musi być zbiorem otwartym (domkniętym) w Y.

85. Pokazać, że jeśli $f: X \to Y$ jest ciągła na X, to obraz zbioru zwartego w przestrzeni metrycznej X jest zbiorem zwartym w przestrzeni metrycznej Y.

86. Udowodnić, że obraz zbioru relatywnie zwartego przez funkcję jednostajnie ciągłą jest zbiorem relatywnie zwartym.

87. Pokazać na przykładzie, że obraz zbioru relatywnie zwartego przez funkcję ciągłą nie musi być relatywnie zwarty.

88. Załóżmy, że $f: X \to Y$ jest funkcją ciągłą na przestrzeni metrycznej X o tej własności, że przeciwobraz każdego zbioru relatywnie zwartego w przestrzeni metrycznej Y jest relatywnie zwarty w X. Pokazać, że f jest odwzorowaniem domkniętym, tzn. $f(A)$ jest domknięty w Y o ile A jest domknięty w X.

89. Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$, ale nie spełnia na $\mathbb{R}$ warunku Höldera (por. zad. 71) z żadną stałą $L > 0$ oraz z żadnym wykładnikiem $\alpha \in (0, 1]$.

90. Niech $f: X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na przestrzeni metrycznej X. Pokazać, że zbiór rozwiązań równania $f(x) = 0$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni X.

ROZDZIAŁ VIII

POCHODNE FUNKCJI. RÓŻNICZKOWALNOŚĆ

Część A

1. Niech $f(x) = \sqrt{4x+1}$. Obliczyć z definicji $f'(2)$.

2. Korzystając z definicji obliczyć $f'(0+)$, gdzie $f(x) = x\sqrt{4x-x^2}$.

3. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji w podanych punktach:

a) $f(x) = -2x^3+5x$ w punkcie $x_0 = -1$,

b) $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ w punkcie $x_0 = 1$,

c) $h(x) = x+\dfrac{1}{x}$ w punkcie $x_0 = 2$.

4. Opierając się na definicji obliczyć pochodne kierunkowe niżej podanych funkcji:

a) $f(x,y) = x^2+xy+3y-1$ w punkcie $(x_0,y_0) = (1,1)$ w kierunku wektora $\boldsymbol{a} = (2,1)$,

b) $g(x,y) = \sqrt{x+y}$ w punkcie $(x_0,y_0) = (4,5)$ w kierunku wektora $\boldsymbol{a} = (-1,1)$,

c) $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xyz$ w punkcie $(x_0,y_0,z_0) = (1,0,-1)$ w kierunku wektora $\boldsymbol{a} = (0,1,2)$.

5. Obliczyć (jeżeli istnieje) $f'(1)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2+3x+1 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ x^2-3x+4 & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

6. Obliczyć (jeżeli istnieje) $f'(2)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+x & \text{dla} \quad x \leqslant 2 \\ x^2-7x+8 & \text{dla} \quad x > 2. \end{cases}$$

7. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x > 0 \\ x(x+1)^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Sprawdzić, czy istnieje $f'(0)$.

8. Obliczyć (jeżeli istnieje) $f'(3)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x-4 & \text{dla} \quad x < 3 \\ 5x+2 & \text{dla} \quad x \geqslant 3. \end{cases}$$

Obliczyć pochodne następujących funkcji po skorzystaniu z odpowiednich twierdzeń.

9. $f(x) = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$.

10. $f(t) = (\sqrt[3]{t}+2t)(1+\sqrt[3]{t^2}+3t)$.

11. $f(u) = \frac{2}{u^3-1}$.

12. $f(x) = \frac{2x^4}{9-x^2}$.

13. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

14. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^4-t^8}}$.

15. $f(u) = \frac{u}{1-\cos u}$.

16. $f(v) = \cos^2 v$.

17. $f(x) = 3\sin^2 x - \sin^3 x$.

18. $f(x) = 3\sin(3x+5)$.

19. $g(u) = \cos^3 4u$.

20. $h(x) = \sin\sqrt{1+x^2}$.

21. $k(t) = t\arcsin t$.

22. $k(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

23. $f(x) = \sin(\arcsin x)$.

24. $f(u) = \arcsin\frac{2}{u}$.

25. $f(t) = \operatorname{arctg}^2\frac{1}{t}$.

26. $g(x) = \operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$.

27. $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

28. $g(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

29. $h(x) = \ln\sin x$.

30. $f(u) = \log_3 u$.

31. $g(u) = \log_5(u^2-1)$.

32. $h(u) = \ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+u^2}$.

33. $f(x) = 10^x$.

34. $g(x) = \frac{x}{4^x}$.

35. $h(x) = x\,8^{x^2}$.

36. $f(u) = \frac{e^u}{1+u^2}$.

37. $g(u) = e^{\sqrt{u^2+1}}$.

38. $h(u) = 3^{\sin u}$.

39. $f(x) = \sinh(5x^2-1)$.

40. $g(x) = \sqrt{\cosh x^2}$.

41. $h(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}}$.

42. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^x$,

b) $g(x) = x^{\sin x}$,

c) $h(x) = \sin x^{\cos x}$,

d) $k(x) = x^{x^x}$.

43. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(u) = \log_u 5$,

b) $g(u) = \log_u(u^2+3)$.

44. Niech $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$. Obliczyć $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, f'(x)$.

45. Niech $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$. Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

46. Niech $f(x) = x|x-1|$. Obliczyć $f'(1+)$, $f'(1-)$. Czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$?

47. Zbadać różniczkowalność funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)^2(x-4) & \text{dla} \quad x \in (3,4) \\ 0 & \text{dla} \quad x \text{ pozostałych.} \end{cases}$$

48. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(0,0) = 0$ oraz $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$. Pokazać, że funkcja ta ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie $\mathbb{R}^2$, lecz nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

49. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$,

c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$,

d) $f(u,v) = \ln(u+\ln v)$,

e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

f) $g(x,y,z) = (\sin x)^{yz}$,

g) $g(u,v,w) = \ln\dfrac{1-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{1+\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$,

h) $h(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

50. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji w podanych punktach:

a) $f(x,y) = x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ w punkcie $(3,4)$,

b) $f(x,y) = \ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$ w punkcie $(1,2)$,

c) $f(x,y,z) = xy^2+yz^2+xz$ w punkcie $(1,-1,1)$.

51. Niech $f(x,y) = x^y$. Pokazać, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

52. Niech $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Pokazać, że $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

53. Znaleźć pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji:

a) $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, b) $g(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$,

c) $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$.

54. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji:

a) $f(x,y) = x^4+y^4+2xy+1$, w punkcie $(1,2)$ w kierunku wektora $\boldsymbol{u} = (3,-1)$,

b) $g(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, w punkcie $(1,1)$ w kierunku wersora dwusiecznej pierwszej ćwiartki,

c) $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, w punkcie $(1,2,3,\ldots,n)$ w kierunku wektora $\boldsymbol{u} = (1,1,\ldots,1)$.

55. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left(\frac{1}{2}x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, \ldots, x_1x_n\right)$. Wyznaczyć jakobian tego odwzorowania w punkcie $(1,1,\ldots,1)$.

56. Niech $f(x,y) = 3x^2y-2xy+y^2-1$, $g(x,y) = e^x\cos y$. Wyznaczyć różniczki drugiego rzędu tych funkcji.

57. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi w następujący sposób: $f(x,y) = (x+2y, -3x+6)$, $g(x,y) = xy$.

a) Wyznaczyć jakobian funkcji f w punkcie $(1,-1)$,

b) obliczyć pochodną kierunkową funkcji $g\circ f$ w punkcie $(1,1)$ w kierunku wektora $\boldsymbol{a} = (1,-2)$.

58. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z) = x+y^2+xyz^3$ w punkcie $(1,1,-1)$ w kierunku wektora $\boldsymbol{a} = (2,0,1)$.

59. Znaleźć pierwsze pochodne funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych równaniami:

a) $x^3y-xy^3 = a^4$, $a = \text{const}$, b) $xe^y+ye^x-e^{xy} = 0$.

60. Znaleźć $y''(0)$ wiedząc, że $y = y(x)$ jest funkcją uwikłaną zadaną równaniem $x^2-xy+2y^2+x-y-1 = 0$ i taką, że $y(0) = 1$.

61. Niech $y = y(x)$ będzie funkcją uwikłaną zadaną równaniem $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2 = 0$. Wiedząc, że $y(1) = 1$ wyznaczyć $y^{(3)}(1)$.

Część B

62. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = |x|^3$ na zbiorze $\mathbb{R}$.

63. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \text{ wymiernych} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \end{cases}$$

ma pochodną tylko w punkcie $x = 0$.

64. Niech $f(x) = \cos(\sin\sqrt{x})$. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

65. Niech $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Obliczyć $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2)^2 f'(x)$.

66. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

67. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma tę własność, że w każdym otoczeniu punktu 0 znajdują się punkty, w których funkcja ta nie jest różniczkowalna. Ponadto pokazać, że f jest różniczkowalna w punkcie 0.

68. Obliczyć pochodną funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Czy f' jest ciągła na $\mathbb{R}$?

69. Zakładając, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, obliczyć granicę

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Czy z istnienia powyższej granicy wynika, że $f'(x_0)$ istnieje?

70. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{dla } x < -2 \\ 3-x & \text{dla } -2 \leqslant x < 3 \\ x^2+x+b & \text{dla } 3 \leqslant x. \end{cases}$$

Dobrać a i b tak, żeby funkcja f była ciągła na $\mathbb{R}$. Czy ta funkcja jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$?

71. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{dla} \quad x \leqslant -1 \\ -bx^2+2 & \text{dla} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ c\cos x+d & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ dp^{\cos x}+p-1 & \text{dla} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dobrać parametry a, b, c, d, p tak, żeby ta funkcja była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

72. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określona w następujący sposób

$$f(x)=\begin{cases} \det\begin{bmatrix} 3x-2 & x-1 & 0 \\ 6x-6 & 3x-3 & 0 \\ 5x-4 & 2x-2 & x-a \end{bmatrix} & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ -3\sin(x-1)+b & \text{dla} \quad x > -1. \end{cases}$$

Dla jakich wartości a i b funkcja ta jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$?

73. Zbadać, czy funkcja $f(x)=\sqrt{\ln(1+x^2)}$ jest różniczkowalna w punkcie $x=0$.

74. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{dla} \quad x<0 \\ ax^2+bx & \text{dla} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Dobrać a i b tak, żeby f była wszędzie różniczkowalna.

75. Zbadać, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, określona w następujący sposób

$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0, \end{cases}$$

ma pochodną w punkcie $x=0$.

76. Wyznaczyć $f^{(n)}(x)$, jeśli $f(x)=\sin^2 x$.

77. Wyznaczyć $f^{(n)}(x)$, jeśli $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

78. Niech φ będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z=y\varphi(x^2-y^2)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

79. Pokazać, że jeśli funkcja $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to funkcja $z=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)-x^2-y^2$ spełnia równanie

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2x^2-2y^2$$

80. Pokazać, że funkcja $z = \varphi(x-at)+\psi(x+at)$, gdzie φ, ψ są dwukrotnie różniczkowalne oraz $a = \mathrm{const}$, spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

81. Niech dana będzie funkcja $\phi(x,y) = f(x, u(x), v(y), w(x,y))$. Wyprowadzić wzory na $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ oraz $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$. Przy jakich założeniach wzory te są spełnione?

82. W jakim kierunku powierzchnia $z = x^2+y^2+3xy$ ma największy spadek w punkcie $(1,1)$?

83. Wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = 3x^2-6xy+y^2$ w punkcie $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$ w kierunku wektora jednostkowego tworzącego kąt α z dodatnią półosią Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma największą wartość?

84. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ oraz $f(0,0) = 0$. Wykazać, że funkcja ta ma w punkcie $(0,0)$ pochodną kierunkową o dowolnym kierunku, ale nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

85. Niech $f(0,0) = 0$ oraz $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Pokazać, że f ma pochodne cząstkowe ograniczone w każdym punkcie $\mathbb{R}^2$,

b) wykazać, że pochodna $f'_{\boldsymbol{u}}(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora jednostkowego $\boldsymbol{u}$ istnieje; wyznaczyć $\max\limits_{\boldsymbol{u}} |f'_{\boldsymbol{u}}(0,0)|$,

c) wykazać, że f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

86. Zbadać różniczkowalność następujących funkcji:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$,

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad x = y = 0, \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

f) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Część C

87. Dana jest funkcja $f(x,y) = x^4+2x^2y-xy+x$. W kierunku jakich wektorów jednostkowych $\boldsymbol{a}$ pochodna kierunkowa $f'_{\boldsymbol{a}}(1,-2)$ osiąga największą i najmniejszą wartość?

88. Pokazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, określona następująco

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ma w punkcie $(0,0)$ pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu, ale pochodne te nie są identyczne.

89. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oraz

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x=y=0 \\ x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Pokazać, że f jest ciągła oraz ma pochodne cząstkowe w dowolnym punkcie $\mathbb{R}^2$, ale nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$. Pokazać, że f ma w punkcie $(0,0)$ pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach.

90. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$ w punkcie $x=0$.

91. Niech $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{|\log_{1/2} x|}$. Zbadać różniczkowalność funkcji f i obliczyć jej pochodną (tam, gdzie istnieje).

92. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $x=0$.

93. Wyznaczyć liczby a, b, c, d tak, żeby funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, określona następująco

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ cx^2+dx & \text{dla} \quad x \in (0,1] \\ 1-\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 1, \end{cases}$$

była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

94. Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ ax^2+c & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{dx^2+1}{x} & \text{dla} \quad x > 1, \end{cases}$$

jest różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}$?

95. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna na $\mathbb{R}$ i niech x_0 będzie miejscem zerowym funkcji f. Pokazać, że jeśli $f'(x_0) = 0$, to funkcja $g(x) = |f(x)|$ ma pochodną w punkcie x_0 oraz $g'(x_0) = 0$.

96. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0, to

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

97. Pokazać, że jeśli f ma pochodną w punkcie $x = a$, to

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = f(a)-af'(a).$$

98. Niech I będzie przedziałem i niech $f: I \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna na I. Pokazać, że f' ma własność Darboux na I.

99. Wyznaczyć $f^{(n)}(x)$, gdzie $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

100. Niech $y = f(x)$ będzie różniczkowalna czterokrotnie. Wyznaczyć pochodne do czwartego rzędu funkcji odwrotnej zakładając, że pochodne te istnieją.

101. Niech $f_{ij}(i,j = 1,2,\ldots,n)$ będą funkcjami różniczkowalnymi na przedziale I. Pokazać, że

$$\left(\det\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \ldots & f_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{bmatrix}\right)' =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \det\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \ldots & f'_{kn}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{bmatrix}.$$

102. Niech $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą.

a) Pokazać, że f ma skończone pochodne jednostronne w każdym punkcie przedziału (a,b).

b) Wywnioskować, że f jest ciągła na przedziale (a,b).

Wskazówka: Wykazać, że iloraz różnicowy funkcji f jest funkcją monotoniczną (por. rozwiązanie zad. 86, rozdz. IV).

Rozdział IX

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Część A

1. Który z ostrosłupów prawidłowych o podstawie kwadratowej i sumie długości wszystkich krawędzi równej a ma największą objętość?

2. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ w jej punkcie przegięcia.

3. Pokazać, że funkcja $f(x) = xe^{-x^2}$ jest różnowartościowa na przedziale $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

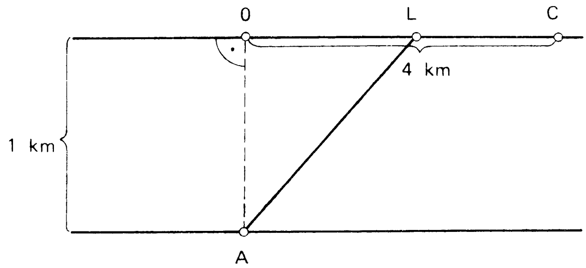
4. Udowodnić, że dla $x \in \mathbb{R}$ jest speniona nierówność
$2x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1+x^2)$.

5. Udowodnić, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ jest prawdziwa nierówność
$\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

6. Wykazać, że namiot w kształcie stożka o danej pojemności ma najmniejszą powierzchnię (chodzi o powierzchnię boczną stożka), jeżeli jego wysokość jest $\sqrt{2}$ razy większa od promienia podstawy.

7. Pokazać, że $\ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$ dla $x > 0$.

8. Człowiek może wiosłować z punktu A do punktu na drugim brzegu kanału z prędkością 4 km/h (por. rys. 1) i biec po drugim brzegu z prędkością 16 km/h. W którym punkcie L powinien przybić do brzegu, aby punkt C osiągnąć w jak najkrótszym czasie?



Rys. 1

9. Zbadać przebieg zmienności i narysować wykresy funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, **b)** $g(x) = \dfrac{x-1}{x\sqrt{x}}$,

c) $h(x) = |x|e^{-x^2}$, **d)** $k(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$,

e) $l(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{x^2}{3}}$, **f)** $m(x) = \dfrac{x^4}{x^3-x}$.

10. W trójkąt prostokątny o zadanym kącie α i przeciwprostokątnej o długości c wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej. Który z tych prostokątów ma największe pole?

11. Ze wszystkich stożków opisanych na kuli o promieniu R wybrać ten, który ma najmniejszą objętość.

12. Wyznaczyć asymptoty funkcji $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

13. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x) = (x^2-2x)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

14. Pokazać, że $2\ln x < x - \dfrac{1}{x}$ dla $x > 1$.

15. W wycinek koła o promieniu 1 i kącie środkowym 45° wpisujemy prostokąt w ten sposób, że jeden bok leży na promieniu skrajnym tego wycinka, jeden z wierzchołków na łuku wycinka a pozostały na drugim promieniu skrajnym. Jakie powinny być wymiary prostokąta o największym polu?

16. Pokazać, że $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} + \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$ dla $x > 0$.

17. Znaleźć p tak, aby funkcja $f(x) = x^3 - px + 5x - 2$ osiągała minimum w punkcie $x = 5$.

18. Zbadać wypukłość i punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^2\ln x$.

19. W zależności od a podać liczbę rozwiązań równania $\ln x = ax$.

20. Za pomocą twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej pokazać, że

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leqslant \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

dla $0 < \beta \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.

21. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

a) $f(x) = x\ln\left(\frac{1}{x}+e\right)$, **b)** $g(x) = x+\sqrt{1+x^2}$,

c) $h(x) = x\operatorname{arctg}x$, **d)** $k(x) = x\ln\frac{2x}{x-2}$.

22. Pokazać, że równanie $x^3+x-3 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale $(1,2)$.

23. Na elipsie $2x^2+y^2 = 18$ są dane punkty $A(1,4)$, $B(3,0)$. Znaleźć na tej elipsie trzeci punkt C taki, żeby pole trójkąta ABC było największe.

24. Zbadać przebieg zmienności i narysować wykres funkcji $y = x\log_x 2$.

25. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f(x) = x^{-x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

26. Udowodnić nierówność

$$y^p - x^p \leqslant (y-a)^p - (x-a)^p,$$

pod warunkiem, że $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant y$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.

27. Wykazać, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność

$$0 < \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 < \frac{5}{81}x^3.$$

28. Wykazać, że jest prawdziwa nierówność

$$a^{p+q} - 1 \geqslant (p+q)(a^p - a^q),$$

pod warunkiem, że $a \geqslant 1$, $p \geqslant q > 0$, $p-q \leqslant 1$.

29. Wykazać, że jeżeli $0 \leqslant a \leqslant x_1 \leqslant x_2$, to wtedy

$$\sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1} \leqslant \sqrt[n]{x_2-a} - \sqrt[n]{x_1-a} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z zad. 26.

30. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \geqslant 0$ mamy

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x \frac{x}{n}.$$

31. Udowodnić, że dla $a, b, x > 0$ oraz $a \neq b$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} > \left(\frac{a}{b}\right)^b.$$

32. Wykazać następujące nierówności:

a) $x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$, gdzie $x \geqslant 0$ i $\alpha \in (0, 1)$,

b) $a^\alpha \cdot b^\beta \leqslant \alpha a + \beta b$, gdzie $a, b, \alpha > 0$ i $\alpha + \beta = 1$,

c) $2(\lambda + 1)ab \leqslant a^{\lambda+1} + b^{\lambda+1} + 2(a^{(\lambda+1)/2} + b^{(\lambda+1)/2})$.

33. Wykazać następujące nierówności:

a) $x^s|\ln x| < \dfrac{1}{5e}$ gdy $s > 0$ i $x \in (0, 1)$,

b) $\ln x \leqslant \sqrt{x}$ dla $x > 0$,

c) $\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \dfrac{1}{x} + \ln x$ dla $x > 0$,

d) $\dfrac{\ln x}{x - 1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dla $x \in (0, +\infty)$, $x \neq 1$,

e) $\dfrac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$ dla $x \in (0, +\infty)$.

34. Udowodnić, że

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

dla każdego $x \in (-1, +\infty)$.

35. Pokazać, że jeżeli a jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $W(x)$, to a jest pierwiastkiem pochodnej $W'(x)$ tego wielomianu.

36. Wykazać następujące tożsamości:

a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$ dla $x \in (-1, +\infty)$,

b) $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$ dla $|x| \geqslant 1$,

c) $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ dla $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

37. Obliczyć następujące granice:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$,

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$,

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$,

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$,

e) $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{k}{1 + \ln x}}$,

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

g) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$,

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$,

i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$, j) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, k) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$,

l) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$, m) $\lim_{x\to\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

Uwaga. Polecamy Czytelnikowi zadania 4–32 znajdujące się w Dodatku, związane z różnymi zastosowaniami rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej w ekonomii. Zadania 60–70, 74 i 75 dotyczą zastosowań w chemii, biologii, fizjologii i psychologii, natomiast zadania 81–84 oraz 88–93 dotyczą zastosowań w fizyce.

Część B

38. Pokazać, że $x\operatorname{arctg}x > \frac{\pi}{2}x-1$, dla $x \geqslant 0$.

39. Obliczyć granicę: $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right)+x$.

40. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na $(0,+\infty)$ taką, że wszystkie styczne do jej wykresu przechodzą przez początek układu współrzędnych. Pokazać, że f jest liniowa.

41. Niech f będzie ciągła na $[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$ oraz niech f będzie dwukrotnie różniczkowalna na (a,b) tak, że $x^2f''(x)+4xf'(x)+2f(x)\geqslant 0$ dla $x\in(a,b)$. Pokazać, że $f(x)\leqslant 0$ dla $x\in[a,b]$.

42. Udowodnić, że jeżeli f jest różniczkowalna na $[a,b]$ oraz $f'(a)\cdot f'(b)<0$, to istnieje punkt $x_0\in(a,b)$ taki, że $f'(x_0)=0$.

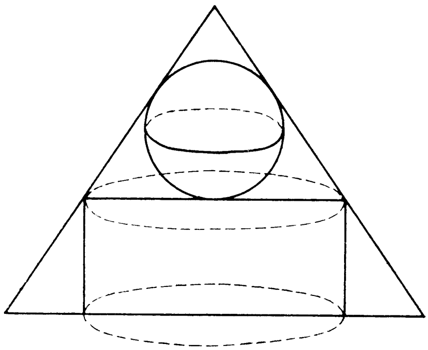
43. Udowodnić następujące twierdzenie, zwane twierdzeniem o koniach wyścigowych: Jeżeli f, g są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) oraz $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, to istnieje taki punkt $c\in(a,b)$, że $f'(c)=g'(c)$.

44. Pokazać, że funkcja $f(x)=\sqrt{1+x^2}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$ jest rosnąca i wklęsła na przedziale $(0,+\infty)$.

45. Załóżmy, że dwaj jeźdźcy startują w tym samym czasie z punktu A i osiągają w tym samym czasie punkt B, przebywając odcinek prostej AB. Pokazać, że w pewnym czasie między punktami A i B muszą mieć jednakową prędkość.

46. W stożek o promieniu $R=3$ i wysokości $H=4$ wpisano walec i kulę w sposób podany na rys. 2.

Dla jakich wymiarów walca (promień podstawy i wysokość) oraz dla jakiego promienia kuli suma objętości kuli i walca będzie największa.



Rys. 2

47. Pokazać, że jeżeli stałe b i c spełniają warunek $256c^3 \leqslant 27b^4$, to wielomian $W(x) = x^4 + bx + c$ ma przynajmniej jedno miejsce zerowe będące liczbą rzeczywistą.

48. Pokazać, że punkty przegięcia funkcji $f(x) = x \sin x$ leżą na krzywej $y^2(x^2+4) = 4x^2$.

49. Pokazać, że $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

50. Niech $f:(a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną (a jest dowolnie zadaną liczbą). Udowodnić, że jeżeli $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = g$, to także $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = g$.

51. Niech $f:(a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i taką, że istnieje $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = C$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = K$. Pokazać, że $K = 0$.

52. Punkty A, B, C leżą po jednej stronie prostej, przy czym $\sphericalangle ABC = \alpha$ oraz odległość od A do B wynosi a km. W tej samej chwili wyrusza samochód z punktu A do punktu B z prędkością v_1 km/h oraz pociąg z punktu B do C z prędkością v_2 km/h. W jakiej chwili (licząc od początku ruchu) odległość między samochodem i pociągiem będzie najmniejsza?

53. Na gałęzi hiperboli $y = \frac{1}{x}$ leżącej w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych wyznaczyć punkt, z którego przedział $[0, 1]$ leżący na osi OY widać pod największym kątem?

54. Niech $f:(a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną na $(a, +\infty)$ i taką, że $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = C$. Pokazać, że wtedy $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = C$.

55. Do rzeki o szerokości 27 m wpada pod kątem prostym kanał o szerokości 8 m. Jaka jest największa długość sztuki drewna, która może wpłynąć z kanału do rzeki?

56. Niech f będzie funkcją rzeczywistą spełniającą warunki: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^{\alpha}$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie $\alpha > 1$. Udowodnić, że f jest funkcją stałą.

57. Wykazać, że dla $x \in [0, 1]$ oraz $p > 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1.$$

58. Znaleźć maksimum funkcji

$$f(x) = (7+x)\sqrt[3]{11-3x},$$

określonej dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

59. Udowodnić, że dla $\alpha < \beta$ i $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

60. Korzystając z rachunku różniczkowego udowodnić następujący wzór:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}, \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

61. Dowieść następujących nierówności:

a) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y| \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}$,

b) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < x \quad \text{i} \quad p > 1$,

c) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a-b| \quad \text{dla} \quad a, b \in \mathbb{R}$,

d) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b} \quad \text{dla} \quad 0 < b < a.$

62. Obliczyć następujące granice:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}}$, gdzie $a > 0$, $n > 0$, **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (x^{x^x} - 1)$,

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$, **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$,

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\,\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$,

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$, **g)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{1/x^2}$

63. Udowodnić, że

$$\alpha^2 < \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha \quad \text{dla} \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wskazówka: Obliczyć trzecią pochodną funkcji $f(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha - \alpha^2$ dla $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

64. Udowodnić nierówność

$$|a\cos x+b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

dla $a,b\in\mathbb{R}$ i dowolnego $x\in\mathbb{R}$.

65. Wykazać nierówność

$$\log_2 3 > \log_3 4.$$

66. Przy jakich wartościach p, q równanie $x^5+px+q=0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste?

67. Załóżmy, że funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły na (a,b) i mającą n różnych miejsc zerowych na (a,b). Pokazać, że pochodna tej funkcji $f'(x)$ ma przynajmniej $n-1$ miejsc zerowych na przedziale (a,b).

68. Wykazać, że dla $n>2$ mamy

$$n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}.$$

69. Udowodnić, że dla $x\in\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ zachodzi nierówność

$$x^3-\frac{x^5}{10} < 3\sin x - 3x\cos x < x^3.$$

70. Udowodnić następujące twierdzenie:

Niech $a\in\mathbb{R}$ i $x\in\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$. Wówczas dla $a\leqslant 3$ mamy

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a.$$

71. Wykazać, że jeżeli $0<x_1<x_2<\sqrt{6}$, to

$$\frac{\sin x_2}{\sin x_1} > \frac{x_2-x_2^3/3!}{x_1-x_1^3/3!}.$$

72. Wykazać prawdziwość nierówności

$$\left(\frac{a+\sqrt{a+4}}{2}\right)^t - a^t > 1,$$

dla $a\geqslant 0$ oraz $t\geqslant 2$.

73. Niech $n\geqslant 3$ i r będą liczbami naturalnymi. Pokazać, że jest prawdziwa *nierówność J. von Hengela*

$$(n+r)^n < n^{n+r}.$$

74. Wykazać nierówność

$$\left(\frac{1-x^n}{1-x^{m+n}}\right)^n > \left(\frac{1-x^m}{1-x^{m+n}}\right)^m$$

dla $x\in(0,1)$ oraz $0<m<n$.

75. Pokazać, że

$$\frac{x^{a+1}-x^{-(a+1)}}{x^{a}-x^{-a}} > \frac{a+1}{ax}$$

dla $a \in (0, +\infty)$ oraz $x \in (1, +\infty)$.

76. Wykazać, że dla $p \in (0,1)$ mamy

$$\frac{2}{e} < p^{\frac{p}{1-p}} + p^{\frac{1}{1-p}} < 1.$$

77. Wielomian $W(x)$ stopnia n $(n > 1)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{W'(x_1)} + \frac{1}{W'(x_2)} + \cdots + \frac{1}{W'(x_n)} = 0.$$

78. Przypuśćmy, że $W(x)$ jest wielomianem takim, że $W(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że

$$u(x) = W(x) + W'(x) + W''(x) + \ldots \geqslant 0.$$

79. Niech $x, y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ i niech ponadto będzie spełniona równość

$$\left(\frac{1}{3}\left(x+(xy)^{1/2}+y\right)\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2}\left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)\right)^{1/2}.$$

Pokazać, że wtedy $x = y$.

Część C

80. Dane są dwa punkty A i B na zewnątrz okręgu o promieniu r. Na okręgu wyznaczyć punkt C taki, żeby suma odległości $AC + BC$ była najmniejsza.

W s k a z ó w k a: Rozważyć najpierw przypadek, gdy punkty A i B są położone w równej odległości od środka okręgu.

81. Niech f będzie różniczkowalna na przedziale (a, b) (skończonym lub nieskończonym). Dowieść, że jeżeli pochodna f' jest ograniczona, to funkcja f jest jednostajnie ciągła w tym przedziale.

82. Oznaczmy przez S_n, $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ oraz przez C_n, $n = 0, 2, 4, \ldots$ poszczególne wielomiany Taylora dla funkcji $\sin x$, $\cos x$, a więc

$$S_n(x) = S_{2k-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

oraz

$$C_n(x) = C_{2k}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Wykazać, że są prawdziwe następujące nierówności:

$C_n(x) \geqslant \cos x$ dla n parzystych lub 0,

$C_n(x) \leqslant \cos x$ dla n nieparzystych,

$S_n(x) \geqslant \cos x$ dla n nieparzystych,
$S_n(x) \leqslant \sin x$ dla n parzystych
oraz dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

83. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha^n < \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha \quad \text{dla} \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wskazówka: Obliczyć n-tą pochodną funkcji $f(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha - \alpha^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

84. Wykazać, że jeżeli $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i ponadto $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x)+f'(x)\big) = g\ (g \in \overline{\mathbb{R}})$, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$.

85. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \geqslant 0$ zachodzą nierówności

$$0 \leqslant e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x\left[1-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-x/2}\right].$$

86. Udowodnić, że jeżeli $a, b > 0$, to wtedy
$a^b + b^a > 1$.

87. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale nieskończonym $(a, +\infty)$ i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, to równanie $f'(x) = 0$ ma w tym przedziale co najmniej tyle pierwiastków ile ma równanie $f(x) = 0$.

88. Pokazać, że dla każdego $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ zachodzi nierówność
$\sin(\operatorname{tg} x) \geqslant x$.

89. Udowodnić, że dla każdego $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ jest spełniona nierówność
$\operatorname{tg}(\sin x) \geqslant x$.

90. Udowodnić, że każdy wielomian jest różnicą dwóch wielomianów rosnących.

91. Dowieść, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wielomian

$$W_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

nie ma pierwiastków wielokrotnych.

92. Udowodnić, że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ (gdzie $g \in \mathbb{R}$), to wtedy

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = g.$$

93. Niech f będzie dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $(0, +\infty)$, f'' ograniczona na $(0, +\infty)$ i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Pokazać, że $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

94. Niech f i g będą dwiema funkcjami odcinkami gładkimi (tzn. mają pierwsze pochodne ciągłe w przedziałach zawartych w danym przedziale otwartym lub domkniętym) w przedziale $[a, b]$, takimi, że funkcja f jest malejąca, dodatnia oraz, że $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$ dla $t \in [a, b]$.

Jeżeli $\lambda = \int\limits_a^b g(t)\,dt$, to wtedy mamy

$$\int\limits_{b-\lambda}^{b} f(t)\,dt \leqslant \int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant \int\limits_a^{a+\lambda} f(t)\,dt$$

(*nierówność Steffensena*).

Pokazać, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest stała na przedziale $[a, b]$, albo jeżeli g jest równa 0 lub 1 w punktach, w których jest ciągła.

Uwaga. Mówimy, że f jest funkcją *odcinkami gładką* w przedziale $[a, b]$, jeżeli istnieją liczby $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ takie, że $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ oraz f' istnieje i jest ciągła w każdym przedziale $(x_i, x_{i+1}) (i = 1, 2, \ldots, n)$.

95. Wykazać, że dla $x \geqslant \sqrt{3}$ zachodzi nierówność

$$(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1.$$

96. Wykazać, że jeżeli

$$S_{2n-1}(x) = x - \frac{x}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},$$

to wtedy

$$\frac{S_{2n-1}(x_2)}{S_{2n-1}(x_1)} < \frac{\sin x_2}{\sin x_1} < \frac{S_{2n+1}(x_1)}{S_{2n+1}(x_2)},$$

gdy $0 < x_1 < x_2 < \sqrt{6}$.

97. Udowodnić, że dla $x > 0$ mamy

$$e^x < (1+x)^{1+x}.$$

98. Pokazać, że jeżeli liczby a, b, c są różne, to zachodzi nierówność

$$3\min\{a, b, c\} < \Sigma a - (\Sigma a^2 - \Sigma ab)^{1/2} < \Sigma a + (\Sigma a^2 - \Sigma ab)^{1/2} < \\ < 3\max\{a, b, c\},$$

przy czym $\Sigma a = a+b+c$, $\Sigma a^2 = a^2+b^2+c^2$, $\Sigma ab = ab+bc+ca$.

99. Na płaszczyźnie są dane punkty A i B leżące po jednej stronie prostej k. Znaleźć na prostej k wszystkie takie punkty M, że stosunek $\frac{AM}{BM}$ jest

a) największy, **b)** najmniejszy.

100. Funkcja $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zerze i spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $h(ax) = bh(x)$, gdzie a, b są pewnymi liczbami rzeczywistymi i $0 \neq |a| \neq 1$. Ponadto $h'(0) \neq 0$. Wykazać, że $a = b$ oraz, że istnieje taka liczba rzeczywista c, że $h(x) = cx$.

101. Dany jest wielomian

$$W(x) = (x-a)^k Q(x),$$

gdzie $a \neq 0$, Q jest wielomianem niezerowym, k jest liczbą naturalną. Dowieść, że W ma co najmniej $k+1$ współczynników różnych od zera.

102. Spośród stożków wpisanych w kulę B wybrano taki stożek S_1, że kula K_1 wpisana w stożek S_1 ma maksymalną objętość. Następnie w kulę B wpisano stożek S_2 o maksymalnej objętości, a w stożek S_2 wpisano kulę K_2. Rozstrzygnąć co jest większe: suma objętości S_1 i K_1, czy suma objętości S_2 i K_2.

103. Doświadczenie polega na wykonaniu n niezależnych prób. Prawdopodobieństwo pozytywnego wyniku w i-tej próbie wynosi p_i. Niech r_k będzie prawdopodobieństwem tego, że dokładnie k prób da wynik pozytywny. Udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{r}_k.$$

104. Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą A taką, że dla każdego trójmianu kwadratowego $f(x)$ spełniającego warunek

$$|f(x)| \leqslant 1 \quad \text{dla} \quad x \in [0, 1]$$

mamy nierówność

$$f'(0) \leqslant A.$$

105. Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą A taką, że dla każdego wielomianu stopnia trzeciego spełniającego warunek

$$|f(x)| \leqslant 1 \quad \text{dla} \quad x \in [0, 1]$$

mamy nierówność

$$f'(0) \leqslant A.$$

106. Udowodnić, że zdanie:

„Dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)+\\&+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}) \geqslant 0\text{''}\end{aligned}$$

jest prawdziwe dla $n = 3$ i $n = 5$ oraz jest fałszywe dla wszystkich pozostałych liczb naturalnych n większych od 2.

107. Udowodnić, że jeżeli $0 < \alpha < 1$, to równanie

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \alpha e^x$$

ma w przedziale $[0, +\infty)$ dokładnie jeden pierwiastek $x = x(n)$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} x(n) = \infty$.

108. Rozwiązać nierówność

$$(x-1)^{x+1} > (x+1)^{x-1}$$

przyjmując za dziedzinę funkcji $(u,v) \to u^v$ zbiór

$$\{(u,v):(u>0) \text{ lub } (u=0\leqslant v) \text{ lub } (u<0, v \text{ — całkowite})\}.$$

109. Niech $a\in\mathbb{R}$ i niech f będzie dwukrotnie różniczkowalną funkcją rzeczywistą określoną na $(a, +\infty)$. Oznaczmy przez M_0, M_1, M_2 odpowiednio kresy dolne $|f(x)|$, $|f'(x)|$ oraz $|f''(x)|$ na zbiorze $(a, +\infty)$. Udowodnić, że

$$M_1^2 \leqslant 4M_0M_2.$$

110. Udowodnić, że dla dowolnego x jest prawdziwa następująca nierówność

$$|e^x(12-6x+x^2)-(12+6x+x^2)| \leqslant \frac{1}{60}|x|^5 e^{|x|}.$$

111. Pokazać, że jeżeli $n \geqslant 2$ i $x\in(0, +\infty)$, to wtedy

$$(x+n-1)\ln(x+n-1)-x\ln x <$$
$$< n-1+\ln(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) <$$
$$< (x+n)\ln(x+n)-(x+1)\ln(x+1).$$

Rozdział X

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Część A

Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji:

1. $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$.

2. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{2(x+y)}$.

3. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

4. $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$.

5. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.

6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$.

7. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.

8. $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$.

9. $f(x, y) = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$.

10. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2xy + y^2)$.

11. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

12. $f(x, y) = (x - 2y)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

13. $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

14. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y$.

15. $f(x, y) = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ przy czym $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

16. $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

17. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

18. $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, gdzie $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

19. $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$, gdzie $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$.

20. $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y$.

21. $f(x, y) = (a \cos x + b \cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2$.

22. $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$, gdzie $x\in[0,a]$, $y\in[0,a]$ i $a>1$.

23. $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$, $a>0$, $b>0$.

24. $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$, gdzie $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $y\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

25. $f(x,y,z)=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2$.

26. $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-2x+4y-6z+1$.

27. $f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-2xy+4z-x$.

28. $f(x,y,z)=x^3+xy+y^2-2zx+2z^2+3y-1$.

29. $f(x,y,z)=xyz(1-x-y-z)$.

30. $f(x,y,z)=2\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}-4x+2z^2$.

31. $f(x,y,z)=(x+y+2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

32. $f(x,y,z)=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b^2}$, gdzie $x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$, $b>0$.

33. $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$ dla $x\in[0,\pi]$, $y\in[0,\pi]$, $z\in[0,\pi]$.

34. $f(x,y,z)=(ax+by+cz)e^{-x^2-y^2-z^2}$.

35. Spośród prostopadłościanów wpisanych w elipsoidę

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

o krawędziach równoległych do jej osi znaleźć ten, którego objętość jest największa.

36. Spośród wszystkich trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć ten, którego pole jest największe.

37. Na płaszczyźnie dane jest n punktów materialnych $P_1(x_1,y_1),\dots,P_n(x_n,y_n)$ z masami odpowiednio równymi $m_1,m_2,\dots,m_n$. Znaleźć punkt $P(x,y)$ taki, że moment bezwładności układu względem tego punktu jest najmniejszy.

38. W części paraboloidy eliptycznej $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z=c$, wpisać prostopadłościan o największej objętości.

39. W dany okrąg o promieniu R wpisać czworokąt o danym kącie α tak, by pole jego było największe.

40. Wyznaczyć prostopadłościan o największej objętości, jeżeli pole powierzchni jest równe $6a^2$.

41. Na prostopadłościanie prostokątnym o wymiarach $2a$, $2b$, $2c$ opisać elipsoidę o największej objętości.

42. Na elipsie opisać trójkąt o największym polu o podstawie równoległej do osi elipsy.

43. Znaleźć maksimum funkcji $f(x,y,z,t) = xyzt$ na zbiorze $S = \{(x,y,z,t): x+y+z+t = c,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$, gdzie $c > 0$.

44. Na elipsoidzie $x^2+y^2+4z^2 = 8$ znaleźć punkt najdalej odległy od punktu $(0,0,3)$.

45. Znaleźć ekstrema warunkowe stosując metodę Lagrange'a:

a) $f(x,y) = x+y$ pod warunkiem, że $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$,

b) $f(x,y,z) = x-2+z$ pod warunkiem, że $x+y^2-z^2 = 1$,

c) $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$ pod warunkiem, że $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\dots+\dfrac{x_n}{a_n} = 1$, gdzie $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$,

d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ pod warunkiem, że $bx+my+nz = 0$ oraz $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$,

e) $f(x,y) = x-y$ pod warunkiem, że $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{tg} y$ i ponadto $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

f) $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \dfrac{\alpha_1}{x_1}+\dfrac{\alpha_2}{x_2}+\dots+\dfrac{\alpha_n}{x_n}$ pod warunkiem, że $\beta_1x_1+\beta_2x_2+\dots+\beta_nx_n = p$, gdzie α_i, β_i, x_i są liczbami dodatnimi dla $i = 1,2,\dots,n$,

g) $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p$, gdzie $p > 1$ pod warunkiem, że $x_1+x_2+\dots+x_n = a\ (a > 0)$,

h) $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ pod warunkiem, że $x_1+x_2+\dots+x_n = a$ oraz $a > 0$, $\alpha_i > 1$, $x_i > 0$ dla $i = 1,2,\dots,n$.

46. Rozłożyć w szereg Maclaurina następujące funkcje:

a) $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$, **b)** $f(x,y) = \ln(1+x+y)$,

c) $f(x,y) = e^x \sin y$, **d)** $f(x,y) = e^x \cos y$,

e) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, **f)** $f(x,y) = \ln(1+x)\ln(1+y)$.

47. Wykazać, że jeżeli

$1+xy = k(x-y)$

przy czym k jest stałą rzeczywistą, to zachodzi równość

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

48. Wykazać, że jeżeli

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0$$

i ponadto $xy>0$, to zachodzi równość

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dx}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

49. Obliczyć y' i y'' dla funkcji uwikłanej y określonej następującymi równaniami:

a) $x^2+2xy-y^2=a^2$, **b)** $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,

c) $y-\varepsilon\sin y=x$, **d)** $y=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

50. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji uwikłanej $z=f(x,y)$ wyznaczonej równaniami:

a) $z=\sqrt{x^2-y^2}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$, **b)** $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$,

c) $x+y+z=e^z$.

51. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej postaci $z=f(x,y)$ zadanej równaniem:

a) $z^3-xyz+y^2=16$, **b)** $z^3-xyz+y^2+4x^2=16$,

c) $x^2+y^2+z^2-xz-y^2+2x+2y+2z=2$,

d) $(x^2+y^2-z^2)^2=a^2(x^2+y^2+z^2)$, $a>0$.

52. Wykazać, że równanie Laplace'a w $\mathbb{R}^2$ postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

we współrzędnych biegunowych $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ wyraża się wzorem

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}v_r=0.$$

53. Pokazać, że podstawiając w równaniu

$$\frac{x^2d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$x=e^t$, otrzymamy równanie postaci

$$\frac{d^2u}{dt^2}+u=0.$$

54. Przechodząc do współrzędnych sferycznych pokazać, że wyrażenia:

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \qquad W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

są postaci

$$W_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$W_2 = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

55. Przekształcić równanie

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2,$$

wprowadzając nowe zmienne

$$x = t, \quad y = \frac{t}{1+tu}, \quad z = \frac{t}{1+tv}.$$

56. Przekształcić następujące równania różniczkowe zwyczajne wprowadzając nowe zmienne:

a) $y'' = \dfrac{6y}{x^3}$, jeżeli $t = \ln|x|$,

b) $(1-x^2)y'' + y' + ny^2 = 0$ jeżeli $x = \cos t$,

c) $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, jeżeli $y = ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}$,

gdzie $p(x) \in C^1$,

d) $x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, jeżeli $x = e^t$, $y = ue^{2t}$,

gdzie $u = u(t)$,

e) $y'' = \dfrac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$, gdzie $A, a, b \in \mathbb{R}$, jeżeli $u = \dfrac{y}{x-b}$,

$t = \ln\left|\dfrac{x-b}{x-a}\right|$ przy czym $u = u(t)$,

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$, jeżeli $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

57. Przekształcić następujące równania różniczkowe cząstkowe wprowadzając nowe zmienne:

a) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} = (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}$, jeżeli $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ i $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,

b) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, jeżeli $u = \dfrac{y}{x}$, $v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

c) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{z}$, jeżeli $u = 2x - z^2$, $v = \dfrac{y}{z}$,

d) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$, jeżeli $x=\xi$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$,

e) $z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$, jeżeli $u=x+2y+z$ i $v=x-y-1$,

f) $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, jeżeli $u=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ i $v=\ln(\sqrt{1+y^2}+y)$,

g) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, jeżeli $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{y}{x^2+y^2}$,

h) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0$, jeżeli $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$,

i) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, jeżeli $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$,

j) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial z^2}{\partial y^2}=0$, jeżeli $u=x\operatorname{tg}\frac{y}{2}$, $v=x$,

k) $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, $(x>0,\ y>0)$, jeżeli $x=(u+v)^2$, $y=(u-v)^2$.

Uwaga. Czytelnikowi pragnącemu zapoznać się z różnorodnymi zastosowaniami rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych w ekonomii polecamy zadania 40–46 znajdujące się w Dodatku. Natomiast zadania 94–103 dotyczą zastosowań w fizyce.

Część B

58. Wykazać, że równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

nie zmienia swojej postaci przy dowolnej zmianie zmiennych

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v)$$

takiej, że jest spełniony warunek

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

Wskazówka. Wykorzystaj metodę z zad. 52.

59. Wykazać, że równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

przy przekształceniu względem nowych zmiennych

$$u = x, \quad v = x+y, \quad w = x+y+z$$

jest postaci

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

60. Wykazać, że jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest różniczkowalna w wypukłym obszarze G i pochodne cząstkowe f_x, f_y są ograniczone, to wtedy $f(x,y)$ jest jednostajnie ciągła w obszarze G.

61. Wykazać, że funkcja f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

jest jednostajnie ciągła w $\mathbb{R}^2$.

62. Zbadać, czy następujące funkcje są jednostajnie ciągłe:

a) $f(x,y) = \sin x \cos y$, **b)** $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$,

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x^2+y^2 = 0, \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^4+y^4}} & \text{dla} \quad x^4+y^4 \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x^4+y^4 = 0. \end{cases}$

63. Liczbę $a > 0$ rozłożyć na n mnożników tak, żeby suma ich odwrotności była najmniejsza.

64. Daną liczbę $a > 0$ rozłożyć na n składników tak, by suma kwadratów tych składników była najmniejsza.
Wskazówka: Skorzystać z metody użytej w zad. 63.

65. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$$

ma nieskończenie wiele maksimów natomiast nie ma żadnego minimum.

66. Wyznaczyć najmniejsze pole n-kąta opisanego na kole o promieniu R.

67. Wykazać *nierówność Hadamarda*: niech

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

oraz niech $a^2+b^2+c^2 = 1$, $a_1^2+b_1^2+c_1^2 = 1$, $a_2^2+b_2^2+c_2^2 = 1$. Wtedy $|\det U| \leqslant 1$.

68. Udowodnić, że jeżeli są spełnione następujące warunki:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = na,$$

to wtedy:

1° $$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \leqslant \binom{n}{2} a^2,$$

2° $$\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i x_j x_k \leqslant \binom{n}{3} a^3,$$

. . . .

(n − 1)° $x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant a^n$.

69. Wykazać, że równanie

$$y + \frac{1}{2}\sin y - x = 0$$

wyznacza dokładnie jedną funkcję uwikłaną postaci $y = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz obliczyć $f'(x)$, $f''(x)$ i $f'(\pi)$, $f''(\pi)$.

70. Wykazać, że równanie

$$z^3 - xyz + y^2 = 16$$

wyznacza dokładnie jedną funkcję uwikłaną $z = f(x, y)$ w otoczeniu punktu $(1, 4, 2)$. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 4)$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 4)$.

71. Wyznaczyć pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcji uwikłanych $x(z)$, $y(z)$ w punkcie $z = 2$, jeżeli funkcje te są zadane układem równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}5\, z^2 \\ x + y + z = 2, \end{cases}$$

i spełniają warunki $x(2) = 1$, $y(2) = -1$.

72. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej postaci $z = f(x, y)$ zadanej równaniem

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 10 = 0.$$

73. Obliczyć różniczki pierwszego i drugiego rzędu funkcji uwikłanej postaci $z = f(x, y)$ zadanej równaniami:

a) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$, **b)** $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$.

74. Obliczyć pochodne $y'(0)$, $z'(0)$, $y''(0)$, $z''(0)$ funkcji uwikłanych $y(x)$, $z(x)$ spełniających założenia $y(0) = -1$, $z(0) = 1$ i zadanych układami równań

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2, \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 + z = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + z = 2. \end{cases}$

75. Pokazać, że równanie

$$x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+zx\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}+xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$$

w nowych zmiennych $x = uv$, $y = vt$, $z = tu$ jest postaci

$$t^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+u^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+v^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0.$$

76. Przekształcić wyrażenie

$$w=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

stosując nowe zmienne

$$t=x+y,\quad u=\frac{y}{x},\quad v=\frac{z}{x}.$$

77. Wykazać, że równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

nie zmienia swojej postaci przy podstawieniu

$$u=x+z,\quad v=y+z.$$

78. Przekształcić równanie

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$$

podstawiając

$$\xi=\frac{y}{z},\quad \eta=\frac{z}{x},\quad \zeta=y-z.$$

79. Wykazać, że każde równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

($a, b, c \in \mathbb{R}$ są stałymi) po wprowadzeniu nowej funkcji

$$z=ue^{\alpha x+\beta y},$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ są stałymi) oraz $u = u(x, y)$, można sprowadzić do postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1u=0\quad (c_1=\text{const}).$$

80. Przekształcić równanie

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

podstawiając $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, $z = e^\zeta$, $u = e^w$, przy czym $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

81. Na elipsoidzie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ znaleźć punkt najbardziej odległy od początku układu współrzędnych.

Część C

82. Podać przykład funkcji wielu zmiennych nie mającej ekstremum w początku układu współrzędnych i takiej, że jej zacieśnienie do dowolnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych ma silne minimum w tym punkcie.

83. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} (y-e^{-1/x^2})(y-3e^{-1/x^2}) & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ y^2 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $(0,0)$, natomiast ma ekstremum absolutne na krzywych typu $y = cx^{m/n}$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, $c \in \mathbb{R}$ jest stałe.

84. Skonstruować przykład funkcji f dwóch zmiennych, takiej że

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)\,dy \neq \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right] dy,$$

mimo że obie całki istnieją w sensie Riemanna.

85. *Zadanie Huygensa*: między liczbami rzeczywistymi a, b wstawić liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, by ułamek:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}$$

miał wartość największą.

86. Wyznaczyć $(n+1)$-kąt o największym polu P wpisany w dane koło o promieniu R.

87. Na sferze $x^2+y^2+z^2 = 1$ znaleźć punkt (x,y,z) taki, by suma kwadratów odległości od n danych punktów $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ była najmniejsza.

88. Wyznaczyć maksimum warunkowe funkcji

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \cos t_i$$

pod warunkiem, że $t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = 1$.

89. Wykazać, że dla krzywej drugiego rzędu $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ zachodzi równość

$$\frac{d^3}{dy^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right] = 0.$$

90. Obliczyć $f'(0)$, $f''(0)$ funkcji uwikłanej $y = f(x)$ spełniającej równanie

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$$

i warunek $f(0) = 1$.

91. Niech $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą mającą ciągłą pochodną cząstkową $\frac{\partial K}{\partial x}$. Obliczyć pochodną funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, określonej wzorem

$$f(x)=\int_a^b K(x,y)\,dy.$$

92. Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x)=\int_a^x K(x,y)\,dy$$

przy założeniu, że K spełnia warunki z poprzedniego zadania.

93. Załóżmy, że α jest ustaloną liczbą rzeczywistą oraz $D\subset\mathbb{R}^n$ jest takim zbiorem, że dla dowolnego $x\in D$ oraz $t\in\mathbb{R}$ również $tx\in D$.

Funkcję $f:D\to\mathbb{R}$ nazywamy *funkcją jednorodną stopnia* α, jeżeli $f(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n)=t^\alpha f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dla dowolnego $t\in\mathbb{R}$ oraz $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D$.

Pokazać, że jeżeli f jest różniczkowalna na D, to f jest funkcją jednorodną stopnia α wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ona *równanie różniczkowe Eulera*

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=\alpha f.$$

ROZDZIAŁ XI

RÓWNANIA FUNKCYJNE

Część A

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takie, że

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right)=x^2$$

dla $x\in\mathbb{R}$ i $x\neq -1$.

2. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takie, że

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

dla $x\in\mathbb{R}$ i $x\neq 0$.

3. Pokazać, że nie istnieje funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, spełniająca równanie funkcyjne

$$f\big(f(x)+f(y)+f(xy)\big)=x+f(y),$$

dla $x,y\in\mathbb{R}$.

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, które spełniają równanie funkcyjne

$$2f(x)+f(1-x)=x,$$

dla $x\in\mathbb{R}$.

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje różnowartościowe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f\big(f(x)+y\big)=f(x+y)+1,$$

dla $x,y\in\mathbb{R}$.

6. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ takie, że

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

dla $x,y\in\mathbb{R}$.

7. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunki:

1° $f(xy)=x^2f(y)+yf(x),\quad x,y\in\mathbb{R}$,

2° $f(2)=2$.

8. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, które spełniają następujące warunki:

1° $f(xy)=x^3f(y)+y^2f(x)+y^2x+yx^3-xy\quad$ dla $\quad x,y\in\mathbb{R}$,

2° $f(2)=2$.

9. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$, $x\in\mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$(x-1)W(x+1)-(x+3)W(x-1)=0,$$

dla $x\in\mathbb{R}$.

10. Pokazać, że nie istnieje funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która jest surjekcją i spełnia równanie funkcyjne

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

dla $x,y\in\mathbb{R}$.

11. Wyznaczyć ogólną postać funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, spełniającej tzw. *równanie funkcyjne Cauchy'ego*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

dla $x,y\in\mathbb{R}$.

12. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające tzw. *równanie funkcyjne Jensena*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

dla $x,y\in\mathbb{R}$.

13. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, które spełniają równanie

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)\cdot f(y)$$

dla $x,y\in\mathbb{R}$.

Część B

14. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ciągłe w zerze i takie, że $2f(2x)=f(x)+x$ dla $x\in\mathbb{R}$.

15. Znaleźć ogólną postać funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takiej, że $a=f(1)>0$ oraz spełniającej równanie funkcyjne

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

dla $x,y\in\mathbb{R}$.

16. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

dla $x, y \in (0, \infty)$.

17. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

dla $x, y \in (0, \infty)$.

18. Znaleźć wszystkie ciągłe rozwiązania równania funkcyjnego

$$f(x+y) = a^{xy} f(x) f(y),$$

gdzie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $a > 0$, $a = \text{const}$.

19. Pokazać, że jeśli $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego (por. zad. 11)

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

oraz jeden z następujących warunków:

1° f jest ciągła w pewnym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$,
2° f jest ograniczona z góry na pewnym przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$,
3° f jest monotoniczna na $\mathbb{R}$,

to jest ona postaci $f(x) = ax$, $a = \text{const}$.

20. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające warunki:

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2° $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$,
3° $f(f(x)) = x$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

21. Pokazać, że jeśli $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą oraz spełniającą równanie funkcyjne

$$f(2x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

to f jest funkcją stałą.

22. Podać przykład funkcji $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, ciągłej na $(0, \infty)$ i spełniającej równanie funkcyjne z zad. 21, która nie jest stała.

23. Wskazać przykład funkcji $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłej, nie będącej funkcją postaci $g(x) = ax$ i spełniającej równanie funkcyjne

$$g(2x) = 2g(x),$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Część C

24. Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Wyznaczyć ogólną postać funkcji $f: X \to X$, spełniającej równanie funkcyjne

$$f(f(x)) = f(x),$$

dla $x \in X$.

25. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równość $f(3x) = 3f(x) - 4(f(x))^3$ i jest ciągła w zerze, to jej wartości należą do przedziału $[-1, 1]$.

26. Rozważmy równanie funkcyjne

$$f(2x) = 2f(x) + x, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Pokazać, że nie istnieje rozwiązanie tego równania będące funkcją dodatnią na pewnym przedziale $(0, \alpha)$,

b) pokazać, że nie istnieje rozwiązanie tego równania będące funkcją ujemną na pewnym przedziale (α, ∞),

c) wykazać, że w klasie funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ równanie to ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

27. Wyznaczyć wszystkie funkcje wymierne zmiennej rzeczywistej spełniające równość $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

28. Niech f i g będą funkcjami rzeczywistymi określonymi w $\mathbb{R}$ i spełniającymi równanie

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Dowieść, że jeśli f nie jest tożsamościowo równa 0 i $|f(x)| \leqslant 1$ dla każdego x, to również $|g(y)| \leqslant 1$ dla każdego y.

29. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

i takie, że $f(1) = 1$.

30. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takie, że $f(xf(y)) = f(x+y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}_+$ oraz spełniające warunki:

1° $f(2) = 0$,

2° $f(x) \neq 0$ dla $x \in [0, 2)$.

31. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające warunki:

1° $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,

2° f jest różniczkowalna na przedziale $(0, \infty)$,

3° $f'(1) = 1$.

32. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, różniczkowalne na $\mathbb{R}$ i spełniające równanie

$$2yf'(x) = f(x+y) - f(x-y),$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$.

33. Wyznaczyć ogólną postać funkcji f, która jest określona i różniczkowalna na pewnym otoczeniu punktu $x = 0$, i spełnia na tym otoczeniu równanie funkcyjne

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

oraz jest taka, że $f(0) = 0$ i $f'(0) = c$, $c = \text{const}$.

34. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są dwukrotnie różniczkowalne i spełniają równanie funkcyjne

$$f(x)f(y) = f\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \cdot f\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$.

35. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dwukrotnie różniczkowalne i spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$.

36. Niech b będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f\big(f(x)+y\big) = f(xy)+b$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$.

37. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x+y)-f(x-y) = f(x)f(y)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$.

38. Znaleźć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają równanie funkcyjne

$$f(x+y)-f(x-y) = yf(x)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$.

39. Pokazać, że funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie funkcyjne

$$f(x+y)-f(x-y) = 2f(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego z zad. 11.

40. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne

$$[f(x)+f(y)]\, f(x+y) = f(xy)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$.

41. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszelkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ nierówność

$$f(xy)+f(xz)-2f(x)f(yz) \geqslant \frac{1}{2}.$$

42. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y) = f(x)f(y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

dla $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

43. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nie równa tożsamościowo zeru, spełniająca równanie funkcyjne

$$2f\big(f(x)\big) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

i taka, że $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

44. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nie równa tożsamościowo zeru, spełniająca równanie funkcyjne

$$2f\big(f(x)\big) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

a ponadto taka, że $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ dla $x \in \mathbb{R}$.

45. Dla ustalonych liczb dodatnich a i b znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniające warunek

$$f\big(f(x)\big) + af(x) = b(a+b)x$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

ROZDZIAŁ XII

CAŁKA NIEOZNACZONA I CAŁKA OZNACZONA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

W rozdziale tym przez całkę oznaczoną będziemy rozumieć całkę oznaczoną w sensie Riemanna. Podobnie, pod pojęciem funkcji całkowalnej, będziemy rozumieć funkcję całkowalną w sensie Riemanna.

Część A

Stosując wzór na całkowanie przez części obliczyć niżej podane całki nieoznaczone:

1. $\int x\sin x\,dx.$

2. $\int x\cos x\,dx.$

3. $\int x e^x\,dx.$

4. $\int x e^{-x}\,dx.$

5. $\int x\,3^x\,dx.$

6. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx.$

7. $\int x^n\ln x\,dx,$ gdzie $n\in\mathbb{N}.$

8. $\int \arccos x\,dx.$

9. $\int \arcsin x\,dx.$

10. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx.$

11. $\int x\cos^2 x\,dx.$

12. $\int x\ln(x^2+1)\,dx.$

13. $\int x^3 e^x\,dx.$

14. $\int x^3\sin x\,dx.$

15. $\int x^2\cos^2 x\,dx.$

16. $\int \ln x\,dx.$

17. $\int \ln^2 x\,dx.$

18. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

19. $\int \sin\ln x\,dx.$

20. $\int \cos\ln x\,dx.$

21. $\int \sqrt{k+x^2}\,dx.$

22. $\int x^2 e^x\sin x\,dx.$

23. $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

25. $\int x^2\cos 4x\,dx.$

26. $\displaystyle\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

27. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

28. $\displaystyle\int \frac{x\,e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx.$

Korzystając z metody całkowania przez podstawienie, wyznaczyć podane niżej całki nieoznaczone.

29. $\int x\,e^{-x^2}\,dx.$

30. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

31. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

32. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

33. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}.$

35. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+1}\,dx.$

36. $\displaystyle\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx.$

37. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x+3}}{\cos^2 x}\,dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{2x^2+7}}.$

39. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx.$

41. $\displaystyle\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

42. $\int x(2x^2+3)^n\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$

43. $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

44. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1+4\sin^2 x}.$

46. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

47. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$

48. $\int \sin^3 x\cos x\,dx.$

49. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5\ln x+7}}{x}\,dx.$

50. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{5+3\sin x}}\,dx.$

51. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(\sin x)}\,dx.$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx.$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}.$

54. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}.$

57. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx.$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}.$

59. Pokazać, że jeżeli $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, to

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C\ (a \neq 0).$$

Stosując twierdzenie z zad. 59, obliczyć całki nieoznaczone:

60. $\int e^{-5x}\,dx.$

61. $\int \sin 7x\,dx.$

62. $\int \cos \pi x\,dx.$

63. $\int \sin^2 x\,dx.$

64. $\int \cos^2 x\,dx.$

65. $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx.$

66. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

68. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

69. $\int xe^{-7x}\,dx.$

70. $\int x\cos^2 3x\,dx.$

Obliczyć niżej podane całki nieoznaczone, nie korzystając z podstawień Eulera.

71. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}.$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+7}}.$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2-30x-71}}.$

75. $\int \sqrt{x^2+6x+13}\,dx.$

76. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx.$

77. $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx.$

78. $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx.$

79. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

80. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx.$

81. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}.$

82. $\displaystyle\int \frac{4x+5}{\sqrt{1-x^2-2x}}\,dx.$

83. $\displaystyle\int \frac{3-x}{\sqrt{5-x^2-4x}}\,dx.$

84. $\int x\sqrt{x^2+3x+4}\,dx.$

85. $\int (2-x)\sqrt{2x^2+3x-8}\,dx.$

86. $\int (2x-1)\sqrt{6x-x^2}\,dx.$

87. $\int (3-2x)\sqrt{6-4x^2-4x}\,dx.$

Wyznaczyć poniżej wypisane całki nieoznaczone z funkcji wymiernych.

88. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}.$

89. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

90. $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

91. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^3-15x^2-19x+30}$.

92. $\displaystyle\int \frac{x^8-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

93. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-5x^2+4}\,dx$.

94. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx$.

95. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

96. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$.

97. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}\,dx$.

98. $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^2}\,dx$.

99. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4}$.

100. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x}$.

101. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

102. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$.

103. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$.

104. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

105. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+4}$.

106. $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$.

107. $\displaystyle\int \frac{x-1}{2x^4+13x^2+6}\,dx$.

108. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

109. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}\,dx$.

110. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+3x^4-4}$.

111. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$.

Obliczyć następujące całki, stosując podstawienia Eulera lub inne metody:

112. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

113. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

114. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

115. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

116. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

117. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

118. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}dx.$

119. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

120. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$

121. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$

122. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx.$

123. $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}dx.$

124. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x^2}dx.$

125. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$

126. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$

127. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$

Obliczyć następujące całki z różniczek dwumiennych:

128. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx.$

129. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx.$

130. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

131. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$

132. $\int x^5\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

133. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}.$

134. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx.$

135. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

Wyznaczyć niżej wypisane całki z funkcji trygonometrycznych:

136. $\int \sin^3x\cos^2x\,dx.$

137. $\int \sin^3x\cos^3x\,dx.$

138. $\int \sin^3x\,dx.$

139. $\int \cos^3x\,dx.$

140. $\int \sin^6x\cos^5x\,dx.$

141. $\int \sin^4x\,dx.$

142. $\int \cos^4x\,dx.$

143. $\int \cos^6x\,dx.$

144. $\int \frac{\sin^3x}{\cos^4x}dx.$

145. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$

146. $\int \frac{dx}{\sin^3x\cos x}.$

147. $\int \frac{\sin^4x}{\cos^2x}dx.$

148. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

149. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$.

150. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$.

151. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

152. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$.

153. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos 3x} dx$.

154. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

155. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

156. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$.

157. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}$.

158. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

159. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

160. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x-\cos^3 x} dx$.

161. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$.

162. $\int \sin 4x \cos 3x \, dx$.

163. $\int \cos 2x \cos 6x \, dx$.

164. $\int \sin 3x \sin 5x \, dx$.

165. $\int \sin x \cos 2x \sin 3x \, dx$.

166. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

167. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

168. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x} dx$.

169. $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x} dx$.

170. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^5 x}$.

Obliczyć całki:

171. $\int \sinh x \, dx$.

172. $\int \cosh x \, dx$.

173. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x}$.

174. $\int \sinh^2 x \, dx$.

175. $\int \operatorname{tgh}^2 x \, dx$.

176. $\int \operatorname{ctgh}^2 x \, dx$.

177. $\int \frac{dx}{\sinh x}$.

178. $\int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}$.

179. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x}$.

180. $\int \frac{\ln x-1}{\ln^2 x} dx$.

181. $\int x^2 e^x \cos x \, dx$.

182. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4} dx$.

183. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\,dx.$

184. $\int \cos \sqrt[2]{x}\,dx.$

185. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}.$

186. $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

187. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

188. $\int x \arcsin(1-x)\,dx.$

189. $\displaystyle\int x \arccos\frac{1}{x}\,dx.$

190. $\int \sqrt{\operatorname{tgh} x}\,dx.$

191. Korzystając z definicji wyznaczyć niżej podane całki oznaczone wiedząc, że całki te istnieją (co jest konsekwencją ciągłości funkcji podcałkowych). W obliczeniach wziąć podziały zadanych przedziałów całkowania na równe części i posłużyć się górnymi, średnimi albo dolnymi sumami całkowymi.

a) $\int\limits_{-2}^{3} x^2\,dx$, **b)** $\int\limits_{0}^{1} x^3\,dx$, **c)** $\int\limits_{0}^{10} 2^x\,dx$, **d)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$

192. Wyznaczyć z definicji całkę

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2},$$

biorąc jakikolwiek normalny ciąg podziałów przedziału $[1,2]$ i wybierając w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ punkt pośredni $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$.

193. Pokazać, że funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych} \\ 1 & \text{dla } x \text{ niewymiernych,} \end{cases}$$

nie jest całkowalna na przedziale $[0,1]$.

Wykorzystując twierdzenie Newtona-Leibniza, wyznaczyć następujące całki oznaczone:

194. $\int\limits_1^e \ln x\,dx.$

195. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx.$

196. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+10}.$

197. $\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin x^2\,dx.$

198. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x\,dx.$

199. $\displaystyle\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

200. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x+4}{(x^2+2x+1)(x^2+1)}dx.$ **201.** $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{x}{1+x^4}dx.$

202. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$, gdzie a, b są stałymi różnymi od zera.

203. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$ **204.** $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

205. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$ **206.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}.$

207. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx.$ **208.** $\int\limits_{0}^{\pi} x^3\sin x\,dx.$

209. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^4 x\,dx.$

210. Pokazać, że jeżeli funkcja f jest funkcją parzystą na przedziale $[-a, a]$, to

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

211. Udowodnić, że dla funkcji f, która jest nieparzysta na przedziale $[-a, a]$, zachodzi równość

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Uwaga. W zadaniach 210 i 211 zakładamy ciągłość funkcji f na przedziale $[-a, a]$.

212. Pokazać, że są spełnione następujące równości:

a) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = 0,$ **b)** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x}dx = 0,$

c) $\int\limits_{-1}^{1} e^{\cos x}dx = 2\int\limits_{0}^{1} e^{\cos x}dx,$ **d)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^{10}\sin^9 x\,dx = 0.$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 210 i 211.

213. Pokazać, że jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx.$$

214. Udowodnić, że

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\,dx \quad (a>0).$$

215. Zakładając ciągłość funkcji f na przedziale $[0,1]$ pokazać, że:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx,$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

216. Niech f będzie funkcją ciągłą i okresową (o okresie T) na $\mathbb{R}$. Pokazać, że wtedy

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

dla dowolnego a.

217. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx,$

b) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx,$ gdzie $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{e} |\ln x|\,dx,$

d) $\displaystyle\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx,$ gdzie funkcja $\operatorname{sgn} x$ jest określona następująco

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x>0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \\ -1 & \text{dla} \quad x<0, \end{cases}$$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x)\,dx.$

218. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x\in[-1,0] \\ x & \text{dla} \quad x\in(0,1] \\ x^2 & \text{dla} \quad x\in(1,2]. \end{cases}$$

Wyznaczyć funkcję $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ dla $x\in[-1,2]$.

219. Wyznaczyć funkcję $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ dla $x\in[0,3]$, gdzie

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{dla } x\in[0,1] \\ -2x+4 & \text{dla } x\in(1,2] \\ 1 & \text{dla } x\in(2,3]. \end{cases}$$

220. Wyznaczyć funkcję

$$F(x)=\int\limits_0^x \big(|t-1|+|t+1|\big)\,dt$$

dla $x\geqslant 0$.

221. Wyznaczyć funkcję $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, określoną wzorem

$$f(x)=\int\limits_0^x \big||t-1|-2\big|\,dt.$$

222. Rozwiązać równania:

a) $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{\pi}{12}$, b) $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{\pi}{6}$.

Część B

Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

223. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$.

224. $\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{x^2}\,\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

225. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$.

226. $\displaystyle\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg}x\,dx$.

227. $\displaystyle\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

228. $\displaystyle\int\frac{x^4\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx$.

229. $\displaystyle\int\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2}\,dx$.

230. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$.

231. $\displaystyle\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$.

232. $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x\,dx$.

233. $\int\max(1,x^2)\,dx$.

234. $\int e^{-|x|}\,dx$.

235. Sprawdzić, czy jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f ciągłej i ściśle monotonicznej na pewnym przedziale, to funkcja $G(y)=yf^{-1}(y)-F\left(f^{-1}(y)\right)$ jest funkcją pierwotną funkcji f^{-1} odwrotnej do f.

236. Wyprowadzić wzory rekurencyjne dla całek:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$, **b)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$, **c)** $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\, dx$.

237. Podać przykład funkcji, która jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$, lecz nie ma na tym przedziale całki nieoznaczonej.

238. Podać przykład funkcji całkowalnej na przedziale $[0, 1]$, ale niecałkowalnej na przedziale $[0, 2]$.

239. Podać przykład funkcji niecałkowalnej na przedziale $[a, b]$ i takiej, żeby wartość bezwzględna tej funkcji była na tym przedziale całkowalna.

240. Niech $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Obliczyć całkę

$$\int\limits_{-a}^{a} \big(f(x) - f(-x)\big)\, dx.$$

241. Udowodnić, że

$$\int\limits_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int\limits_0^1 x^n (1-x)^m\, dx.$$

242. Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[0, 1]$. Pokazać, że wtedy

$$\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx.$$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 215.

243. Korzystając z zad. 242, obliczyć całkę:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

244. Niech f będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt$ jest parzysta, jeżeli f jest nieparzysta oraz nieparzysta, jeżeli f jest parzysta.

245. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\, dt$$

na przedziale $[-1, 1]$.

246. Pokazać, że jeżeli funkcje f, g, f^2, g^2 są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to jest spełniona następująca nierówność

$$\left| \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\, dx},$$

zwana *nierównością Schwarza*.

247. Korzystając z nierówności $1 < \ln x < \frac{x}{e}$ dla $x > e$ pokazać, że

$$0{,}92 < \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} < 1.$$

248. Udowodnić, że

$$\frac{\pi}{6} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

249. Pokazać, że

$$0{,}78 \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant 0{,}93.$$

250. Udowodnić nierówność

$$\sqrt{2}-1 \leqslant \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}} \leqslant \ln\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

251. Wykazać, że

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^6}} \geqslant \ln(1+\sqrt{2}).$$

252. Wykazać, że

$$1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \leqslant \sqrt{1{,}2}.$$

253. Udowodnić równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0,$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = 0.$

Część C

Będziemy tutaj korzystać z następującego kryterium całkowalności funkcji:

Załóżmy, że $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną. Weźmy podział przedziału $[a,b]$ za pomocą punktów $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; oznaczmy $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\delta_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$. Niech $M_i = \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i = \inf\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ oraz niech $\omega_i = M_i - m_i$ oznacza oscylację funkcji f na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Wtedy na to, żeby f była całkowalna na przedziale $[a,b]$ potrzeba i wystarcza, żeby

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

254. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą i ściśle rosnącą na przedziale $[0,c]$, $f(0)=0$ oraz niech $a\in[0,c]$, $b\in[0,f(c)]$ będą dowolnie wybranymi liczbami. Pokazać, że wtedy jest spełniona następująca nierówność

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(x)\,dx \geqslant ab,$$

zwana *nierównością Younga* (f^{-1} oznacza funkcję odwrotną do funkcji f). Wskazówka: Skorzystać z zad. 235.

255. Wykazać, że jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ oraz

$$\int_c^d f(x)\,dx > 0$$

dla każdego przedziału $[c,d]$ zawartego w $[a,b]$ $(c\neq d)$, to $f(x)\geqslant 0$ dla $x\in[a,b]$.

256. Wykazać, że jeżeli funkcja f jest dodatnia i całkowalna na przedziale $[a,b]$, to istnieje przedział $[c,d]\subset[a,b]$ taki, że $\inf\limits_{x\in[c,d]} f(x)>0$.

257. Udowodnić, że dla funkcji f całkowalnej i nieujemnej na przedziale $[a,b]$ nierówność

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór miejsc zerowych funkcji f nie jest gęsty w przedziale $[a,b]$.

258. Pokazać, że jeżeli $f(x)>0$ na przedziale $[a,b]$ i f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

259. Niech f będzie funkcją całkowalną i okresową (o okresie T) na zbiorze $\mathbb{R}$. Pokazać, że

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n\int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$ oraz $n\in\mathbb{N}$.

260. Niech funkcja f będzie ograniczona i wklęsła na przedziale $[a,b]$. Pokazać, że

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Wskazówka: Wykorzystać fakt, że przy przyjętych założeniach funkcja f jest ciągła na przedziale (a,b), a zatem jest całkowalna na $[a,b]$.

261. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale $[a,b]$ i taką, że f' jest całkowalna na tym przedziale. Niech

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Znaleźć $\lim_{n \to \infty} n\Delta_n$.

262. Pokazać, że funkcja Riemanna określona w zad. 57, rozdz. VII, jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$. Wyznaczyć wartość całki z tej funkcji na tym przedziale.

263. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. Przedłużmy funkcję f na cały zbiór $\mathbb{R}$, przyjmując, że $f(x) = 0$ dla $x \notin [a, b]$. Pokazać, że

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0.$$

Uwaga. Sformułowaną wyżej własność nazywa się *własnością całkowej ciągłości.*

264. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, +\infty)$ i taką, że istnieje skończona granica $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$. Znaleźć

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt.$$

265. Niech funkcja $f(x)$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły na przedziale $[a, b]$ oraz niech $f(a) = 0$. Udowodnić, że

$$M \leqslant \sqrt{(b-a) \int_a^b [f'(x)]^2\,dx},$$

gdzie $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

ROZDZIAŁ XIII

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE. WARTOŚĆ GŁÓWNA CAŁKI

Część A

Obliczyć całki niewłaściwe:

1. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^4}.$

2. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx.$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

5. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx.$

6. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$

7. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\sin x\,dx.$

8. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx.$

9. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

10. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$

Zbadać zbieżność następujących całek niewłaściwych:

11. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\,dx.$

12. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}dx.$

13. $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}.$

14. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx.$

Obliczyć następujące całki niewłaściwe lub pokazać, że są one rozbieżne:

15. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

16. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

17. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$.

18. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

19. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

20. $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

21. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

Zbadać zbieżność następujących całek niewłaściwych:

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

23. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

25. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

26. Obliczyć pole figury zawartej między wykresem funkcji $f(x)=$ $=\dfrac{2x^4+4x^2+x+1}{x^4+2x^2+1}$ a jej asymptotą.

27. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi $y=\dfrac{1}{x^2(x+1)}$, $y=0$, leżącej nad przedziałem $[1, +\infty)$.

28. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y=\sqrt{x}\,e^{-x}$ dookoła osi Ox dla $x \geqslant 0$.

29. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Wskazówka: Podstawić $z=\dfrac{1}{x-1}$.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$,

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$,

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$,

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx$,

f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}$,

g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$,

h) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

30. Obliczyć granicę:

$$I = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt[n]{1+t^{2n}}\,dt}{x^3}.$$

31. Udowodnić, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}} = 0.$$

32. Niech f, g będą funkcjami określonymi i lokalnie całkowalnymi na przedziale $[a,\infty)$. Ponadto zakładamy, że f jest nieujemna, natomiast g jest dodatnia na tym przedziale.

Pokazać, że jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \; (0 \leqslant K \leqslant \infty),$$

to ze zbieżności całki $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ dla $K<\infty$ wynika zbieżność całki $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, a z rozbieżności pierwszej całki dla $K>0$ wynika rozbieżność drugiej.
Wskazówka: Skorzystać z definicji granicy i kryterium porównawczego. Oddzielnie udowodnić twierdzenie, gdy $K=0$.

33. Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na przedziale $[0,\infty)$. Uzasadnić następujące twierdzenie:

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{A_0>a} \bigwedge_{A,A'>A_0} \left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Wskazówka: Skorzystać z definicji granicy niewłaściwej dla funkcji $\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx$.

34. Udowodnić następujące nierówności:

a) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|a\sin x + b\cos x|}{x^2}\,dx \leqslant \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\pi}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$ (por. zad. 47, rozdz. III).

b) $$-\frac{\pi}{4} \leqslant \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{4+x^2}\,dx \leqslant \frac{\pi}{4},$$

c) $$\frac{1}{19} < \int_1^{\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < \frac{1}{19} + \frac{1}{39}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności:

$$\frac{1}{x^{20}} \leqslant \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} \leqslant \frac{1}{x^{40}} + \frac{1}{x^{20}} \text{ dla } x \geqslant 1.$$

d) $$\frac{20}{19} < \int_0^{\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < \frac{20}{19} + \frac{1}{20},$$

Wskazówka: Obliczyć maksimum funkcji $f(x) = \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}$ dla $x \in [0, 1]$. Wykorzystać zad. 34c).

e) $$0 < \int_2^{\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{4e^4},$$

Wskazówka: Zauważyć, że prawdziwa jest nierówność $e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{2} x e^{-x^2}$ dla $x \in [2, +\infty)$.

35. Pokazać, że:

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

b) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x} = n!$ dla $n \in \mathbb{N}$,

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a)$,

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,(b-a), \quad a, b > 0.$

36. Udowodnić, że

$$\int_0^\infty f\left(\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right)dx = \frac{1}{A}\int_0^\infty f(y^2)\,dy \quad (A, B > 0).$$

37. Obliczyć wartość główną następujących całek:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{1}{2} - \sin x}$,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$,

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}$,

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$,

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \operatorname{arctg} x\,dx$.

38. Wykazać, że

$$\text{v.p.}\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{(1-t)^{a-1} - (1+t)^{a-1}}{t}\,dt.$$

39. Pokazać następujące równości:

a) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x\,dx = 0$,

b) v.p. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = 0$,

c) v.p. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$,

d) v.p. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1}{4}\pi$.

Część B

40. Uzasadnić następujące kryterium Abela: Załóżmy, że funkcje $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ spełniają warunki

1° funkcja $f(x)$ jest całkowalna na $[a, +\infty)$ (niekoniecznie bezwzględnie),

2° funkcja $g(x)$ jest monotoniczna i ograniczona, $|g(x)| \leqslant C$, $C \in \mathbb{R}_+$ dla $x \in [a, +\infty)$.

Wtedy całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ jest zbieżna.

W s k a z ó w k a: Skorzystać z zad. 33. Posłużyć się twierdzeniem o wartości średniej postaci

$$\int\limits_A^{A'} f(x)\,g(x)\,dx = g(A)\int\limits_A^E f(x)\,dx + g(A')\int\limits_E^{A'} f(x)\,dx,$$

przy czym $E \in [A, A']$, A, A' dowolne liczby rzeczywiste, natomiast f i fg są całkowalne na przedziale $[A, A']$.

41. Udowodnić następujące *kryterium Dirichleta*:
Niech funkcje $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będą takie, że:

1° f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[a, A]$ (gdzie $A > a$) oraz istnieje $C > 0$ takie, że

$$\left|\int\limits_a^A f(x)\,dx\right| \leqslant C$$

dla każdego $A > a$,

2° g jest monotoniczna oraz

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Wtedy całka $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ jest zbieżna.

W s k a z ó w k a: Skorzystać z zad. 33 oraz z twierdzenia o wartości średniej zawartego we wskazówce do zad. 40.

42. Wykazać zbieżność całki

$$\int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad a > 0.$$

Zbadać zbieżność niżej podanych całek:

43. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$

44. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$

45. $\int\limits_0^\infty \left(\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)dx.$

46. $\int\limits_0^\infty x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}\,dx.$

47. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\cdot e^{\sin x}}{x^\alpha}\,dx.$

48. $\int\limits_0^\infty \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)x}{n}}{n}\right)dx.$

49. $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx.$

Wskazówka: Podstawić $x^2 = t$ i skorzystać z zad. 43.

50. $\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx.$

51. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$

52. Pokazać, że całka $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ nie jest zbieżna bezwzględnie.

Wskazówka: Skorzystać z zad. 51.

53. Udowodnić następujące nierówności:

a) $0 < \int\limits_1^\infty e^{-x^n}\,dx < \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 2$.

Wskazówka: Skorzystać z nierówności $e^{x^n} > x^{n-1}$ dla $x \geqslant 1$.

b) $1-\frac{1}{n} < \int\limits_0^\infty e^{-x^n}\,dx < 1+\frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 1$.

Wskazówka: Skorzystać z faktu, że $1-x^n < e^{-x^n}$, dla $x\in[0,1)$.

c) $\left|\int\limits_a^\infty \frac{\sin(x-a)}{x^n}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a^n}$ dla $a > 0$.

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o wartości średniej postaci: Jeżeli f jest malejąca na przedziale $[a,b]$ i g jest całkowalna na $[a,b]$, to istnieje $c\in[a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\cdot\int_a^c g(x)\,dx.$$

d) $0 < \int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{2e}$.

W s k a z ó w k a: Skorzystać z nierówności $x^2 \geqslant 2x-1$ dla $x \geqslant 1$.

e) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} xe^{-\sqrt{1+x^2}}dx < \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$.

W s k a z ó w k a: Zauważyć, że

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} xe^{-\sqrt{1+x^2}}\,dx < \int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{1+z^3}},$$

Następnie skorzystać z nierówności $z^3-z^2 < z^3+1$, dla $z \geqslant 2$, i obliczyć całkę $\int\limits_2^{\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z-1}}$.

54. Wykazać, że dla każdego $a > 0$ zachodzi równość

$$\int\limits_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\ln x\,\frac{dx}{x} = \ln a\int\limits_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x},$$

jeżeli obie całki są zbieżne.

55. Udowodnić, że dla $p > 0$ mamy:

a) $\int\limits_0^{\infty} f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{x} = 0,$ **b)** $\int\limits_0^{\infty} f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{1+x^2} = 0,$

jeżeli tylko całki są zbieżne.

56. Udowodnić, że:

a) $\int\limits_0^{\infty} x^n e^{-x}\sin x\,dx = n!\,2^{-(n+1)/2}\cdot\sin\frac{\pi(n+1)}{4},$

b) $\int\limits_0^{\infty} x^n e^{-x}\cos x\,dx = n!\,2^{-(n+1)/2}\cdot\cos\frac{\pi(n+1)}{4},$

dla $n\in\mathbb{N}$.

57. Udowodnić, że całki $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$ oraz $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{[x]}$ ([x] oznacza część całkowitą liczby x) są rozbieżne, natomiast całka

$$\int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx$$

jest zbieżna i jej wartość jest równa stałej Eulera γ (por. zad. 55, rozdz. VI). Podać interpretację geometryczną tej całki.

58. Obliczyć całkę $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) dx.$

Wskazówka: Porównaj zad. 57.

59. Wykazać, że

$$\text{v.p.} \int\limits_0^\infty \frac{2x \sin ax}{x^2 - r^2} dx = \pi \cos ar \, (a > 0, r > 0).$$

Część C

60. W zależności od parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność całki

$$\int\limits_\pi^\infty \frac{dx}{x^\alpha |\sin x|^\beta}.$$

61. Niech f będzie funkcją monotoniczną na przedziale $[0, +\infty)$ i taką, że istnieje $\int\limits_0^\infty f(x)\, dx$. Udowodnić, że wtedy

$$\int\limits_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{n=1}^\infty f(nh).$$

62. Wykazać, że

$$\lim_{t \to 1^-} (1-t)\left(\frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \ldots\right) = \ln 2.$$

Wskazówka. Skorzystać z zad. 61 przyjmując $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

63. Wykazać, że

$$\lim_{t \to 1^-} (1-t)^2\left(\frac{t}{1-t} + \frac{2t^2}{1-t^2} + \ldots + \frac{nt^n}{1-t^n} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 61. Przyjąć $f(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ (por. rozwiązanie zad. 61).

64. Pokazać, że:

a) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{(n-1)!\, 2^{n-1}\cdot a^{2n-1}}\frac{\pi}{2}$,

b) $\int\limits_0^\infty e^{-(x^2+a/x^2)}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{a}}\ (a > 0)$,

c) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ (*całka Eulera*),

d) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{\pi}{2}\cdot \ln 2$,

e) $\int\limits_0^\infty \frac{x\, dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{\pi}{2}\ln 2$,

f) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln|\sin^2 x - a^2|\, dx = -\pi \ln 2\ (a^2 \leqslant 1)$.

65. Niech $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i taką, że istnieje granica $f(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Pokazać, że

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = [f(0)-f(\infty)]\ln\frac{b}{a},$$

gdzie $a > 0$ i $b > 0$.

Uwaga. Całka po lewej stronie powyższej równości nosi nazwę *całki Froullaniego.*

66. Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i taką, że dla każdego $A > 0$ istnieje całka $\int\limits_A^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx$. Pokazać, że wtedy

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Wskazówka: Dowód poprowadzić analogicznie jak w zad. 65.

67. Obliczyć następujące całki:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \ln\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\cdot\frac{dx}{x}$,

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$, d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx$.

Wskazówka: Skorzystać z zad. 65 i 66.

68. Obliczyć całkę postaci

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx,$$

zwaną *całką Laplace'a.*

69. Obliczyć następujące całki (zwane również *całkami Laplace'a*):

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx$.

70. Wykazać, że:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = -(\arcsin a)^2$, gdzie $|a|<1$,

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 x+m^2\sin^2 x)\,dx = \pi\ln\frac{m+1}{2}$, gdzie $m>-1$,

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1+a\sin x}{\ln(1-a\sin x)}\,\frac{dx}{\sin x} = \pi\arcsin a$, dla $|a|<1$,

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}(\arccos a)^2$, $|a|<1$,

e) $$\int\limits_0^{\pi} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx = \frac{1}{2}\pi \ln(1+a), \text{ dla } a > -1.$$

Wskazówka: Porównać rozwiązanie zad. 69.

71. Podać przykład funkcji $f:[1, +\infty) \to \mathbb{R}$, dla której całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ istnieje i jest skończona, natomiast $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq 0$.

72. Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ takiej, że całka $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$ jest skończona, ale funkcja ta jest nieograniczona na dowolnym przedziale $[a, \infty)$, dla $a > 0$.

ROZDZIAŁ XIV

ZASTOSOWANIA RACHUNKU CAŁKOWEGO

Część A

Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

1. $y = x^2$ i $x = y^2$.

2. $y = \ln x, y = \ln^2 x$.

3. $y = x^2, y = x^3$.

4. $y = x^3, y = x^5$.

5. $y = x^2-6x+10, y = 6x-x^2$.

6. $x^2+y^2 = 8, 2y = x^2$.

7. $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1, \frac{x^2}{2}-y^2 = 1$.

8. $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$.

9. $x = 0, x = y^2(y-1)$.

10. $(y-x)^2 = x^5, x = 4$.

11. $(y-x-2)^2 = 9x, x = 0, y = 0$.

12. Obliczyć pole figury ograniczonej pętlą linii $y^2 = x(x-1)^2$.

13. Znaleźć pole figury ograniczonej następującymi liniami zamkniętymi:

a) $y^2 = (1-x^2)^3$,

b) $y^2 = x^2-x^4$,

c) $(y-\arcsin x)^2 = x-x^2$.

14. Obliczyć pole figury ograniczonej jednym łukiem cykloidy $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ i osią odciętych.

15. Obliczyć pole elipsy danej równaniami parametrycznymi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

16. Obliczyć pole figury ograniczonej asteroidą daną parametrycznie $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

17. Znaleźć pole figury ograniczonej kardioidą $x = 2a\cos t-a\cos 2t$, $y = 2a\sin t-a\sin 2t$.

18. Obliczyć pola następujących pętli danych parametrycznie:

a) $x = 3t^2, y = 3t-t^3$,

b) $x = t^2-1, y = t^3-t$.

19. Obliczyć pole ewoluty elipsy danej parametrycznie

$x = \frac{c^2}{a^2}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b^2}\sin^3 t$, gdzie $c^2 = a^2 - b^2$.

20. Obliczyć pole figury danej parametrycznie:

$x = a\cos t$, $y = \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

Obliczyć pola następujących figur ograniczonych krzywymi zadanymi we współrzędnych biegunowych:

21. $r = a\cos\varphi + b\,(b \leqslant a)$ (ślimak).

22. $r^2 = 2a^2\cos\varphi$.

23. $r = a\sin 3\varphi$ (trójlistnik).

24. $r = \frac{1}{\varphi}$, $r = \frac{1}{\sin\varphi}$.

25. $r = a\,\mathrm{tg}\,\varphi\,(a > 0)$ i prostą $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

26. $r = 3+\cos 4\varphi$, $r = 2-\cos 4\varphi$.

27. Obliczyć pole figury ograniczonej we współrzędnych biegunowych dwoma krzywymi o równaniach

$r = 2+\cos 2\varphi$ i $r = 2+\sin\varphi$.

28. Znaleźć pole figury ograniczonej lemniskatą Bernoulliego

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

29. Obliczyć pole figury ograniczonej lemniskatą Bernoulliego i leżącej wewnątrz okręgu $x^2+y^2 = a^2/2$.

30. Znaleźć pole figury ograniczonej linią $(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

31. Znaleźć pole figury ograniczonej linią $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$.

Obliczyć długości następujących krzywych płaskich danych poniższymi funkcjami:

32. $y = \ln x$ przy czym $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

33. $y = \ln(1-x^2)$, gdzie $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

34. $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$, gdzie $x \in [a, b]$.

35. Znaleźć długość linii danej wzorem

$y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

36. Znaleźć długość części traktrysy danej parametrycznie

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \; y = a \sin t,$$

od punktu $(0, a)$ do punktu (x, y).

37. Obliczyć długość ewoluty okręgu

$$x = R(\cos t + t \sin t), \; y = R(\sin t - t \cos t)$$

od $t_1 = 0$ do $t_2 = \pi$.

38. Obliczyć długość pętli danej parametrycznie

$$x = t^2, \; y = t - \frac{t^3}{3}.$$

39. Znaleźć długość krzywej

$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \; y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t,$$

od punktu $t_1 = 0$ do $t_2 = \pi$.

40. Obliczyć długość spirali hiperbolicznej danej we współrzędnych biegunowych wzorem $r = \frac{1}{\varphi}$, przy czym kąt zmienia się od $\varphi_1 = \frac{3}{4}$ do $\varphi_2 = \frac{4}{3}$.

41. Obliczyć długość kardioidy $r = a(1 + \cos \varphi)$.

42. Wyznaczyć długość linii $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

43. Obliczyć objętość stożka kołowego o wysokości h i promieniu podstawy r.

44. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu krzywej danej równaniami parametrycznymi $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$, dla $t \in [0, 2\pi]$ i obracającej się:

a) dookoła osi Ox, **b)** dookoła osi Oy.

45. Obliczyć objętość bryły, która powstaje z obrotu pętli danej parametrycznie

$$x = 2t - t^2, \; y = 4t - t^3$$

i obracającej się:

a) dookoła osi Ox, **b)** dookoła osi Oy.

46. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu krzywej $y = x^2 e^{-x^2}$ dookoła jej asymptoty.

47. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu części hiperboli $x^2 - y^2 = a^2$ ograniczonej prostą $x = a + h$ dookoła osi Ox.

48. Obliczyć objętość brył powstałych z obrotu następujących krzywych dookoła osi Ox:

a) $x^2 + y^2 = a^2 x^2$, **b)** $x^4 + y^4 = x^3$.

Wskazówka: Wyznaczyć y^2 z każdego z równań jako funkcję zmiennej x.

49. Obliczyć objętość bryły, która powstaje z obrotu krzywej $y = \frac{1}{1+x^2}$ dookoła jej asymptoty.

50. Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ dookoła osi Ox.

51. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej z obrotu łuku cykloidy $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ dookoła osi Ox.

52. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej z obrotu krzywej $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$, gdzie $x \in [0, a]$, dookoła osi Ox.

53. Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu krzywej $y = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, dookoła osi Ox.

54. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu krzywej danej parametrycznie $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ dookoła osi Ox, gdzie $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Obliczyć długości następujących krzywych:

55. $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \in [0, 1]$.

56. $y = 1 - \ln(\cos x)$ dla $x \in \left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$.

57. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ dla $y \in [1, e]$.

Wskazówka: Obliczyć całkę względem zmiennej y.

58. $y^3 = px^2$ przy czym $y \in [0, y_0]$ i $y_0 \in \mathbb{R}_+$.

59. Danej parametrycznie: $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.

60. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (asteroida).

Wskazówka: Skorzystać z przedstawienia parametrycznego (por. zad. 16).

61. Danej parametrycznie:

$x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$,

gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

62. Zwoju spirali Archimedesa $r = a\varphi$, gdzie $\varphi \in [0, 2\pi]$.

63. Spirali logarytmicznej

$r = ae^{m\varphi}$, $\varphi \in [\varphi_0, \theta]$.

64. Napisać wzór na długość elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

65. Wyznaczyć pole zawarte między parabolami $y^2=2px$ i $x^2=2y$.

66. Znaleźć pole części wspólnej wnętrza koła $x^2+y^2=4px$ i paraboli $y^2=2px$.

67. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu cysoidy $(2a-x)y^2=x^2$ dookoła osi Ox, gdzie $x\in[0,b]$ oraz $b<a$.

68. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu krzywej $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ dookoła osi Ox, dla $x\in[0,+\infty)$.

69. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu krzywej danej parametrycznie $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (cykloidy) dookoła prostej $x=a\pi$.

70. Obliczyć następujące granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi a}{n}+\sin\frac{2\pi a}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi a\right)$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n^n}}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}$.

71. Przypuśćmy, że pod działaniem pewnej siły F punkt materialny P porusza się po osi Ox, przy czym kierunek działania siły pokrywa się z kierunkiem ruchu punktu oraz siła F zmienia się w sposób ciągły w zależności od położenia punktu P, tzn. $F=f(x)$, gdzie f jest funkcją ciągłą. Znaleźć pracę, jaką wykona siła F przy przesunięciu punktu P od punktu $A(a)$ do punktu $B(b)$.

72. Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać, aby wyczerpać wodę napełniającą zbiornik w kształcie walca o wysokości $h=5$ m i promieniu podstawy $r=3$ m.

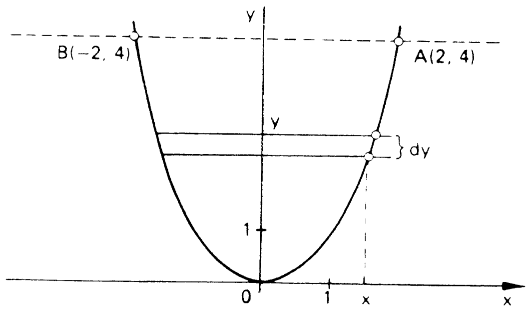
73. Ładunek elektryczny E działa siłą ce^E/x^2 na ładunek e znajdujący się w odległości x, gdzie c oznacza stały współczynnik. Przypuśćmy, że skutkiem tego działania jest przesunięcie ładunku e po linii prostej przechodzącej przez punkt o ładunku E z odległości a do odległości $b\,(b > a)$. Obliczyć wykonaną pracę przy przesunięciu.

74. Naczynie ma kształt paraboloidy obrotowej o promieniu podstawy $R = 2$ m i głębokości $H = 4$ m. Ciężar właściwy płynu napełniającego naczynie wynosi 0,8 G/cm^3. Znaleźć pracę jaką trzeba wykonać, aby wyczerpać płyn z naczynia.

75. Zbiornik ma kształt stożka ściętego o długościach promieni podstaw: dolnej r, górnej R i wysokości h. Obliczyć pracę potrzebną na wypompowanie cieczy z pełnego naczynia. Ciężar właściwy cieczy jest równy γ.

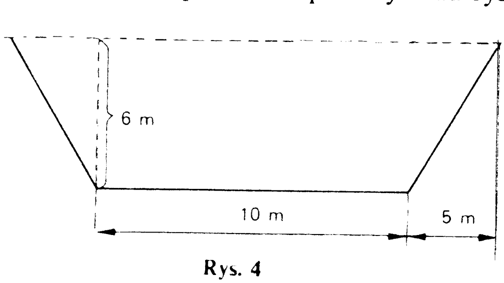
76. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ściankę trójkąta o podstawie 10 cm i wysokości 4 cm zanurzoną w wodzie w taki sposób, że podstawa jest równoległa do swobodnej powierzchni wody, a przeciwległy wierzchołek podstawy znajduje się na powierzchni wody.

77. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ściankę w kształcie segmentu parabolicznego o wymiarach (w metrach) i położeniu podanym na rys. 3.



Rys. 3

78. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ściankę w kształcie trapezu równoramiennego o wymiarach i położeniu podanym na rys. 4.



Rys. 4

Część B

79. Obliczyć sumę

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}-\frac{1}{3}\binom{n}{1}+\frac{1}{5}\binom{n}{2}-\ldots\pm\frac{1}{2n+1}\binom{n}{n}.$$

80. Wykazać, że jeżeli $f(x)\neq 0$ dla $x\in[a,b]$ i $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$, to istnieją liczby $a_1,b_1\in[a,b]$ takie, że $f(a_1)f(b_1)<0$.

81. Pokazać, że jeżeli

$$c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0,$$

gdzie $c_0,\ldots,c_n$ są liczbami rzeczywistymi, to równanie

$$c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$$

ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty między 0 a 1.

82. Udowodnić następujące tożsamości:

a) $$\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{t}{\sin t}\,dt.$$

Wskazówka: Podstawić $x=\operatorname{tg}\frac{1}{2}t$,

b) $$\int\limits_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\frac{d\beta}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\cos\beta\right)^{n+1}},$$

gdzie $n\in\mathbb{N}$ i $x\in(1,+\infty)$.

c) $$\int\limits_0^{2\pi}\varphi(a\cos\theta+b\sin\theta)\,d\theta=2\int\limits_0^{\pi}\varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right)d\lambda,$$

gdzie $\varphi(u)$ jest funkcją ciągłą dla $|u|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

d) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}g(\sin 2u)\cos u\,du=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}g(\cos^2 v)\cos v\,dv,$$

gdzie g jest funkcją ciągłą na przedziale $[0,1]$.

83. Obliczyć następujące granice:

a) $$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}-\frac{1}{m+1}\right),$$

b) $$\lim_{n\to\infty}n\left(\ln 2-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)\right).$$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 261, rozdz. XII.

84. Obliczyć długość ślimaka Pascala danego we współrzędnych biegunowych równaniem $r = a\cos\varphi + b$.

85. Obliczyć długość jednego łuku epicykloidy

$x = a[(n+1)\cos t + \cos(n+1)t]$,

$y = a[(n+1)\sin t - \sin(n-1)t]$.

86. Udowodnić, że długość jednego łuku hipocykloidy

$x = a[(n-1)\cos t + \cos(n-1)t]$,

$y = a[(n-1)\sin t - \sin(n-1)t]$

jest równa $8a\dfrac{n-1}{n}$.

Wskazówka: Skorzystać z wyniku z zad. 85.

87. Obliczyć pole elipsy

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$,

gdzie $AC - B^2 > 0$, $C > 0$.

Wskazówka: Wyznaczyć funkcję $y(x)$ z równania elipsy.

88. Obliczyć pole pętli Kartezjusza

$y^3 + x^3 = 3axy$.

Wskazówka: Wprowadzić współrzędne biegunowe.

89. Dowieść, że pole S trapezu krzywoliniowego ograniczonego osią Ox, prostymi $x = a$, $x = b$ i krzywą $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ można określić wzorem

$$S = \frac{1}{3}(b-a)(y_1 + y_2 + y_3),$$

gdzie y_1, y_2, y_3 są wartościami y dla

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{a+b}{2},\ x_3 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

90. Obliczyć pole ograniczone krzywą $y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$ i prostymi $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

91. Obliczyć pole bryły powstałej z obrotu krzywej $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ dookoła osi Ox, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

92. Obliczyć pole ograniczone krzywą $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

93. Obliczyć pole ograniczone lemniskatą $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

94. Obliczyć pole spodkowej elipsy $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

Obliczyć pole ograniczone krzywymi przedstawionymi we współrzędnych biegunowych:

95. $r = a\cos^3\varphi$.

96. $r = a^2 \dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$, gdzie $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

97. Elipsą $r = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, przy czym $e < 1$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$.

98. Hiperbolą $r = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, gdzie $e > 1$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$ oraz $e\cos\varphi_0 > -1$.

99. Obliczyć pole elipsoidy powstałej przez obrót dookoła osi Ox elipsy
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, gdy $a > b$

100. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej z obrotu hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wokół osi Ox, dla $y \in [-4, 4]$.

101. Prosty stożek kołowy jest przecięty na 2 części płaszczyzną przechodzącą przez środek podstawy i równoległą do tworzącej. Znaleźć objętość części stożka uwzględniając, że przecięcia stożka płaszczyznami równoległymi do tworzącej są odcinkami paraboli.

102. Obliczyć objętość figury powstałej z obrotu krzywej

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

dookoła osi Ox.

103. Obliczyć pole powierzchni otrzymanej przez obrót dookoła osi Ox krzywej $y = \sin x$, gdzie $x \in [0, \pi]$.

104. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej z obrotu asteroidy

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

dookoła osi Ox.
Wskazówka: Skorzystać z parametrycznego przedstawienia asteroidy.

105. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót kardioidy $r = a(1+\cos\varphi)$ dookoła osi biegunowej, dla $\varphi \in [0, \pi]$.
Wskazówka: Skorzystać ze wzoru

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2}\, d\varphi.$$

106. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej z obrotu krzywej $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ dookoła osi biegunowej.

107. Znaleźć pracę, jaką należy wykonać na przezwyciężenie siły ciężkości, *aby podnieść masę m z powierzchni Ziemi na wysokość h, jeżeli siła przyciągania* ziemskiego w odległości x od środka Ziemi wynosi $F = \dfrac{mgR^2}{x^2}$, gdzie R oznacza promień Ziemi. Jaką prędkość należy nadać ciału, aby rzucone z powierzchni Ziemi pionowo nie wróciło na Ziemię? Opór powietrza pomijamy.

108. Obliczyć parcie cieczy na płytkę w kształcie rombu o długości boku a i kącie ostrym $\frac{1}{3}\pi$ zanurzoną pionowo w cieczy tak, że jeden z jego wierzchołków przy kącie ostrym dotyka powierzchni cieczy, a przekątna rombu wychodząca z tego wierzchołka jest ustawiona pionowo. Ciężar właściwy cieczy – γ.

109. Puszkę walcową o przekroju eliptycznym o długościach osi a i b napełniono do połowy cieczą o ciężarze właściwym γ i następnie po hermetycznym zamknięciu z góry położono pionowo w ten sposób, że oś elipsy a i oś walca są poziome, a oś b pionowa. Obliczyć parcie cieczy na płaską ściankę puszki.

Uwaga: Różnorodne zastosowania rachunku całkowego można znaleźć w niektórych zadaniach zamieszczonych w Dodatku. Zadania 47–59 dotyczą zastosowań w ekonomii, zadania 71 oraz 76–80 nawiązują do zastosowań w chemii, biologii, fizjologii i psychologii, natomiast zastosowań w fizyce zadania 104–114.

Część C

110. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu krzywej

$$r = a(1+\cos\varphi)$$

dookoła osi biegunowej, gdzie $\varphi \in [0, \pi]$.

Wskazówka: Skorzystać z następującego wzoru na objętość figury powstałej z obrotu dookoła osi biegunowej krzywej danej równaniem $r = r(\varphi)$, gdzie $\varphi \in [\alpha, \beta]$ oraz $\alpha \geqslant 0$:

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

111. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu krzywej $r = a\varphi\,(a > 0)$ dookoła osi biegunowej dla $\varphi \in [0, \pi]$.

Wskazówka: Skorzystać ze wzoru ze wskazówki do zad. 110.

112. Niech φ będzie funkcją całkowalną na przedziale $[0, 1]$ oraz niech f będzie funkcją wypukłą na pewnym przedziale otwartym zawierającym zbiór $\varphi([0, 1])$ i taką, że $f \circ \varphi$ jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$. Pokazać, że zachodzi nierówność

$$f\left(\int_0^1 \varphi(x)\,dx\right) \leqslant \int_0^1 f(\varphi(x))\,dx,$$

zwana *nierównością Jensena dla całki.*

113. Udowodnić, że jeżeli $f(n) = \int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^n x\, dx$ dla $n \in \mathbb{N}$, to wtedy są prawdziwe następujące nierówności i równości:

a) $f(n+1) < f(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$,

b) $f(n) + f(n-2) = \dfrac{1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $n > 2$,

c) $\dfrac{1}{n+1} < 2f(n) < \dfrac{1}{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $n > 2$.

114. Niech f będzie funkcją dodatnią i ciągłą na $[0,1]$; oznaczmy

$I_n = \int\limits_0^1 (f(x))^n dx$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Pokazać, że

$I_{n-1}^2 \leqslant I_n I_{n-2}$ dla $n > 1$.

115. Niech f będzie funkcją rzeczywistą różniczkowalną w sposób ciągły na $[a,b]$. Niech $f(a) = f(b) = 0$ oraz $\int\limits_0^1 f^2(x)\, dx = 1$. Wykazać następujące zależności:

a) $\int\limits_a^b x f(x) f'(x)\, dx = -\dfrac{1}{2}$,

b) $\int\limits_a^b (f'(x))^2 dx \cdot \int\limits_a^b x^2 f^2(x)\, dx \geqslant \dfrac{1}{4}$.

116. Dowieść, że jeżeli funkcja f jest ciągła i dodatnia na przedziale $[a,b]$ i M jest kresem górnym tej funkcji, to zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int\limits_a^b (f(x))^n dx} = M.$$

117. Obliczyć pole ograniczone krzywą $x^4 + y^3 = ax^2 y$.
Wskazówka: Przedstawić krzywą w postaci parametrycznej, wprowadzając nową zmienną t za pomocą wzoru $y = tx$.

118. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ dookoła osi Ox.
Wskazówka: Obliczyć $y(x)$ z równania asteroidy.

119. W prostym walcu kołowym (szklance) o promieniu r znajduje się woda. Oś walca jest nachylona do horyzontu pod kątem α. Część dna pokryta wodą jest odcinkiem o kącie środkowym 2φ. Znaleźć objętość wody.
Wskazówka: Skorzystać ze wzoru na objętość $v = \int\limits_a^b P(x)\, dx$, gdzie $P(x)$ jest polem przekroju odpowiadającego odciętej x.

120. Niech φ, ψ będą funkcjami nieujemnymi i całkowalnymi na przedziale $[0,1]$ oraz takimi, że $\varphi(x)\psi(x) \geqslant 1$ dla $x \in [0,1]$. Udowodnić, że

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \int_0^1 \varphi(x)\,dx \geqslant 1.$$

121. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ równanie

$$\cos^n x \sin nx = \frac{1}{2^n\pi}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\ldots+\frac{2^n}{n}\right)$$

ma pierwiastek w przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

122. Wykazać, że w przedziale $[0,1]$ istnieje pierwiastek równania

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \frac{1}{8}\pi \ln 2.$$

123. Udowodnić, że liczba e jest przestępna (tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych).

124. Niech $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Pokazać, że wtedy jest prawdziwa nierówność

$$xy \leqslant ax^p + by^{p'} \text{ dla dowolnych } a, b \in \mathbb{R}.$$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 254, rozdz. XII.

125. Udowodnić nierówność

$$ab \leqslant a \ln a - a + e^b$$

dla $a, b \in \mathbb{R}_+$.

Wskazówka: Skorzystać z zad. 254, rozdz. XII.

126. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}-1\right) \leqslant \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^4}\,dx \leqslant \frac{1}{4}\pi.$$

127. Udowodnić nierówność

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x^2 \sin^2 t} \sin t\, dt \leqslant \frac{\pi^2}{8x^2}\left(1-e^{-x^2}\right).$$

128. Udowodnić następujące nierówności:

a) $$\left|\int_0^x \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) \cos at\, dt\right| < \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \text{ dla } x \in (0, \pi),$$

b) $$e^x - 1 < \int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\, dt < \sqrt{(e^x-1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)}$$

dla $x \in (0, +\infty)$.

129. Niech $f_0(x)$ będzie funkcją całkowalną dla $x \geqslant 0$ oraz

$$f_n(x) = \int\limits_0^x f_{n-1}(t)\,dt \text{ dla } n = 1, 2, \ldots$$

Pokazać, że zachodzi nierówność

$$n f_{n+1}(x) < x f_n(x).$$

130. Wykazać, że jest prawdziwe oszacowanie

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx \leqslant \sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{2}\pi$$

dla $n = 1, 2, \ldots$

131. Udowodnić, że:

a) jeżeli $f(x) = \int\limits_x^{x+1} \sin t^2 dt$, to dla $x > 0$ zachodzi nierówność

$$|f(x)| < \frac{1}{x},$$

b) jeżeli $f(x) = \int\limits_x^{x+1} \sin e^t dt$, to dla $x > 0$ zachodzi nierówność

$$e^x |f(x)| < 2.$$

132. Niech a, b będą liczbami dodatnimi i niech f będzie funkcją rzeczywistą taką, że $f(0) = 0$, $f(a) = b$, $f(x) \geqslant 0$ i $f''(x) \geqslant 0$ na przedziale $[0, a]$. Pokazać, że wtedy zachodzi nierówność

$$2\int\limits_0^a f(x)\left(1 + [f'(x)]^2\right)^{1/2} dx \leqslant b(a^2 + b^2)^{1/2}.$$

133. Udowodnić, że jeżeli $a, b \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$, $\left(xf(x)\right)' \geqslant 0$ dla $x \in [a, b]$, to wtedy zachodzi nierówność

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos(\ln x)\,dx\right| \leqslant 2bf(b).$$

134. Niech g będzie funkcją monotoniczną na $[a, b]$. Pokazać, że wtedy zachodzi nierówność

$$\left|\int\limits_a^b g(x)\cos x\,dx\right| \leqslant 2\left(|g(a) - g(b)| + |g(b)|\right).$$

135. Wykazać, że jeżeli $0 < y < x$, to wtedy zachodzi następująca nierówność:

$$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y}.$$

136. (*Zadanie J. Bernoulliego*) Wykazać, że długość L elipsy o półosiach a i b spełnia nierówność

$$\pi(a+b) < L < \pi\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

ROZDZIAŁ XV

SZEREGI LICZBOWE

Część A

Wykazać, że następujące szeregi są zbieżne oraz wyznaczyć ich sumy:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

W s k a z ó w k a: Pomnożyć każdy wyraz przez $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

Posługując się warunkiem koniecznym zbieżności szeregu pokazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sin\frac{1}{n}\right)$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych:

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{(n+1)}}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-n\sqrt{n}}\right)$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\ln\frac{n^3+1}{n^3}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e^{-1/n}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^2\frac{1}{n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}\sin\frac{1}{n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n+1}-\cos\frac{1}{n}\right)$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\mathrm{tg}\frac{1}{n}\right)$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right)$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\frac{\pi}{4^n}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)}}$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x^n}{n^2}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$.

Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność następujących szeregów:

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$.

43. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln(n!)}$.

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, gdzie a stałą dodatnią i $a \neq e$.

Korzystając z kryterium Cauchy'ego rozstrzygnąć, które z podanych niżej szeregów są zbieżne:

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg}(n^2+1))^n$.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(2n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n$.

52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

53. Zbadać zbieżność szeregu postaci

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

wiedząc, że wyrazy a_k dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ są wyrazami postępu arytmetycznego ($a_k \neq 0$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Wskazówka. Skorzystać z zad. 39, rozdz. I.

54. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$ stosując kryterium Cauchy'ego. Pokazać też, że szereg ten nie reaguje na kryterium d'Alemberta.

Stosując kryterium całkowe zbadać zbieżność szeregów:

55. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+s} n}$, $s > 0$, $s = \text{const}$.

56. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n \cdot \ln\ln n}$.

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

58. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

59. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych:

60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

61. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$.

62. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

63. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

64. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

65. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$.

66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

67. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \pi n^2$.

Rozstrzygnąć, które z podanych niżej szeregów są zbieżne warunkowo, a które bezwzględnie:

68. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

69. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$.

70. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

71. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}$.

72. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

73. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

Wskazówka: Pokazać, że nie jest prawdą, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$.

77. Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)} = 1.$$

78. Pokazać, że suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest nie większa od 2.

W s k a z ó w k a: Skorzystać z zad. 34, rozdz. I.

79. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$, **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sin\frac{1}{n}}$, **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma \sin\frac{1}{n}}$, gdzie $\sigma \in \mathbb{R}_+$.

80. Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

81. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}.$$

82. Wykazać, że istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{n} \right).$$

Część B

Zbadać zbieżność szeregów:

83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sin\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{n} \right) \right] \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{1}{n} \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n^2+1}} \right) \right]$.

85. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$. **86.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$. **88.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right)$.

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+(-1)^n)^n}{4^n}$.

91. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}}$.

93. Pokazać, że jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich i takim, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, to $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

94. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$$

Wskazówka: Przyjąć, że $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$.

95. Zbadać zbieżność szeregu

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n-\alpha}{n+1}\right)$, gdzie $\alpha > 0$.

96. Zbadać zbieżność szeregu

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln^2 n}$.

97. Udowodnić, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$ jest rozbieżny. Wykorzystać to twierdzenie do pokazania, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ jest rozbieżny.

98. Pokazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ też jest zbieżny.

99. Pokazać na przykładzie, że twierdzenie z poprzedniego zadania nie będzie prawdziwe, jeżeli opuścimy założenie o dodatniości wyrazów a_n.

Zbadać zbieżność bezwzględną szeregów:

100. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n+\ln^2 n}$.

101. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}}$.

102. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n}}{n}$.

103. $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n-1]^n\frac{1}{n+2^n}$.

104. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n+1)+\sin n}$. **105.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right]$.

106. Pokazać, że jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne i jeden z nich jest zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

107. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

108. Wykazać, że jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

109. Niech $u_n \geqslant 0$ i $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \infty$. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+nu_n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n n^2}$, **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

Część C

110. Zbadać zbieżność szeregu

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{n^{1/p}}}$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, $p = \mathrm{const.}$

111. Wykazać, że szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny, jeżeli $\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} < -1$ i rozbieżny, jeżeli $\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} > -1$.

112. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny, $u_n \geqslant 0$. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1+2u_2+\dots+nu_n}{n} = 0$$

i ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_1+2u_2+\dots+nu_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

113. Niech $a_n > 0$ i niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie zbieżny. Podstawmy

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$$

a) wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ jest rozbieżny,

b) zbadać zbieżność szeregu postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$.

114. Pokazać, że jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ zachodzi nierówność

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$

gdzie $r > 1$, to szereg ten jest zbieżny; jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$$

to szereg ten jest rozbieżny.

115. Udowodnić, że jeżeli $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich takich, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n}$ jest rozbieżny, i następnie dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ będzie utworzony ciąg

$$\mathscr{K}_n = v_n \frac{u_n}{u_{n-1}} - v_{n+1},$$

to wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny, jeżeli $\lim_{n\to\infty} \mathscr{K}_n \leqslant 0$, i zbieżny jeżeli $\lim_{n\to\infty} \mathscr{K}_n > 0$.

116. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, jeżeli $u_1 = 1$ oraz

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}.$$

117. Udowodnić, że dla każdego szeregu zbieżnego o składnikach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, istnieje szereg zbieżny o składnikach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \infty.$$

118. Pokazać, że dla dowolnego szeregu rozbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ istnieje szereg rozbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0.$$

119. Udowodnić, że jeżeli u_n jest ciągiem takim, że $u_n > 0$ i $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ oraz $\varrho > 0$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^{1+\varrho}}$$

jest zbieżny.

120. Wykazać *twierdzenie Diniego*: Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny i $u_n \geqslant 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^{1+\varrho}}$$

jest zbieżny dla $\varrho > 0$ oraz rozbieżny dla $\varrho \leqslant 0$.

121. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^{1+\varrho}},$$

gdzie $\varrho \in \mathbb{R}$.

122. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varrho}},$$

gdzie $\varrho \in \mathbb{R}$.

123. Dowieść, że jeżeli $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem różnych liczb naturalnych, których rozwinięcia dziesiętne nie zawierają cyfry 0, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 29.$$

124. Niech $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

125. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2k}{2^{k+1}}\right]$$

przy dowolnie ustalonym $n \in \mathbb{N}$.

126. Wykazać, że jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}, \text{ gdzie } \sigma > 0$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^\sigma} = 0.$$

127. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

128. Udowodnić *twierdzenie Riemanna*: Z każdego szeregu o składnikach rzeczywistych, zbieżnego warunkowo, można, zmieniając jedynie porządek jego składników, otrzymać szereg, którego suma jest dowolną liczbą rzeczywistą z góry zadaną, skończoną lub nieskończoną.

ROZDZIAŁ XVI

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

Załóżmy, że zadany jest niepusty zbiór X. Przyjmiemy następujące określenia.

Definicja 1. *Ciągiem funkcyjnym określonym na X będziemy nazywać ciąg funkcji $\{f_n\}$, gdzie $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Załóżmy dalej, że $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcyjnym określonym na X.

Definicja 2. *Punkt $x \in X$ będziemy nazywać punktem zbieżności ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$, jeżeli istnieje granica właściwa ciągu liczbowego $\{f_n(x)\}$.*

Zbiór wszystkich punktów zbieżności ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ nazywamy *obszarem zbieżności* tego *ciągu.*

Definicja 3. *Niech $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ będzie obszarem zbieżności ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$. Funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}$, określoną wzorem*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in A,$$

będziemy nazywać funkcją graniczną ciągu $\{f_n\}$. Mówimy też, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo do funkcji f na obszarze zbieżności A.

Załóżmy dalej, że A jest obszarem zbieżności ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ i f jest funkcją graniczną tego ciągu. Niech B będzie zadanym podzbiorem niepustym zbioru A.

Definicja 4. *Będziemy mówić, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do f na zbiorze B (co piszemy: $f_n \underset{B}{\rightrightarrows} f$) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, gdzie $\{b_n\}$ jest ciągiem liczbowym określonym w następujący sposób:*

$$b_n = \sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)|.$$

Część A

1. Wyznaczyć obszary zbieżności i funkcje graniczne podanych niżej ciągów funkcyjnych:

a) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$,

b) $g_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$,

c) $h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}$.

Czy zbieżność tych ciągów jest jednostajna na ich obszarach zbieżności?

2. Wyznaczyć obszar zbieżności i funkcję graniczną ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ określonego na $\mathbb{R}$, przy czym $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$.

Pokazać, że $\{f_n\}$ nie jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$, ale jest zbieżny jednostajnie na każdym zbiorze postaci $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, gdzie $a > 0$.

3. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}_+$ następująco:

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx+1 & \text{dla } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{dla } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Wyznaczyć obszar zbieżności i funkcję graniczną tego ciągu. Zbadać, czy $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji granicznej f na wyznaczonym obszarze zbieżności.

4. Niech $f_n\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (\sin x)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Pokazać, że $\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny do swej funkcji granicznej na każdym przedziale $I \subset [0, \pi]$, który zawiera liczbę $\frac{\pi}{2}$.

5. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym wzorem

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \quad \text{dla} \quad -1 < x < \infty.$$

Wyznaczyć funkcję graniczną i obszar zbieżności tego ciągu oraz zbadać charakter zbieżności $\{f_n\}$ na jego obszarze zbieżności.

6. Pokazać, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$.

7. Wyznaczyć obszary zbieżności i funkcje graniczne dla ciągów funkcyjnych:

a) $f_n(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{n^2}}$, $x \in [1, \infty)$,

b) $g_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0, 1]$.

Zbadać, czy ciągi te są zbieżne jednostajnie na swoich obszarach zbieżności.

8. Zbadać charakter zbieżności ciągu $\{f_n\}$, $f_n(x) = ne^{-nx^2}$, $x \in [0, \infty)$.

9. Dany jest ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie $f_n(x) = x^n(1-x^n)$. Wyznaczyć funkcję graniczną i zbadać charakter zbieżności tego ciągu na zbiorach $A = [0, 1]$, $B = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $C = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $D = [a, 1-a]$, gdzie $0 < a < \frac{1}{2}$.

10. Niech dany będzie ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$. Wyznaczyć funkcję graniczną i obszar zbieżności tego ciągu. Pokazać, że $\{f_n\}$ nie jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$, ale jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$.

11. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}$ za pomocą wzoru $f_n(x) = \cos\left(1 - \frac{x}{n}\right)$. Pokazać, że $\{f_n\}$ nie jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$, ale jest zbieżny niemal jednostajnie.

12. Pokazać, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, \infty)$.

13. Pokazać, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[a, \infty)$ dla każdego $a > 1$.

14. Pokazać, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale postaci $[a, \infty)$, gdzie $a > 0$.

15. Pokazać, że szeregi funkcyjne

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$, **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2[1+n^2x^2]}$,

są zbieżne jednostajnie na $\mathbb{R}$.

16. Za pomocą kryterium Weierstrassa zbadać, czy następujące szeregi funkcyjne są zbieżne jednostajnie:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in [\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

17. Funkcja f jest określona na $\mathbb{R}$ wzorem: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}$. Pokazać, że funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i obliczyć $\int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx$.

18. Wyznaczyć przedziały zbieżności następujących szeregów potęgowych:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$, **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n10^{n-1}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$, **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)3^{n-1}\cdot x^{n-1}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x\right]^n$.

Czy szeregi te są zbieżne na końcach swoich przedziałów zbieżności?

19. Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$.

20. Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Pokazać, że szereg ten nie jest zbieżny jednostajnie na przedziale $(-1, 1)$.

Wskazówka: Zbadać, czy ciąg funkcyjny $\left\{\sum_{k=n}^{\infty} x^k\right\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji tożsamościowo równej zeru na przedziale $(-1, 1)$.

21. Określić obszary zbieżności następujących szeregów funkcyjnych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n}$,

c) $\sum_{n=2}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$.

22. Następujące funkcje rozwinąć w szereg Maclaurina:

a) $f(x) = x^2 e^x$, b) $f(x) = e^x \sin x$,

c) $f(x) = \sin 3x$, d) $f(x) = \ln(1+e^x)$,

e) $f(x) = e^{-x^2}$, f) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$,

g) $f(x) = \sin^2 x$.

23. Rozwinąć funkcję $f(x) = \ln x$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = 1$.

24. Rozwinąć funkcję $f(x) = \sqrt{x^3}$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = 1$.

25. Funkcję $g(x) = \frac{1}{x}$ rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = 3$.

26. Funkcję $h(x) = \frac{1}{x^2+4x+7}$ rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = -2$.

27. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π, przy czym $f(x) = -\frac{\pi}{4}$ dla $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = \frac{\pi}{4}$ dla $x \in (0, \pi)$ oraz $f(0) = f(\pi) = f(-\pi)$.

Rozwinąć funkcję f w szereg Fouriera.

28. Korzystając z rozwinięcia funkcji f z zad. 27 wyprowadzić *wzór Leibniza*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

29. Niech $f(x) = |x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$ oraz niech f będzie funkcją okresową o okresie 2π. Rozwinąć tę funkcję w szereg Fouriera.

30. Korzystając z rozwinięcia w zad. 29 wyprowadzić *wzór Eulera*:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

31. Rozwinąć w szereg Fouriera następujące funkcje:

a) $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in (-\pi, 0) \cup \{\pi\}, \\ x & \text{dla} \quad x \in [0, \pi), \\ \pi & \text{dla} \quad x = -\pi, \end{cases}$

oraz $h(x + 2\pi) = h(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Korzystając z rozwinięcia funkcji $h = h(x)$ obliczyć sumę szeregu liczbowego

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Część B

32. Zbadać charakter zbieżności ciągu funkcyjnego $f_n(x) = n \operatorname{tg} \frac{x}{n}$ na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

33. Wyznaczyć funkcję graniczną i zbadać charakter zbieżności ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ określonego na $\mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{e^{-nx}}{n}$.

34. Wyznaczyć funkcje graniczne i zbadać charakter zbieżności następujących ciągów funkcyjnych określonych na $\mathbb{R}$:

a) $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$, **b)** $f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$,

c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$, d) $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{n^2+x^2}$,

e) $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{n^3+x^2}$.

35. Wyznaczyć funkcje graniczne i zbadać charakter zbieżności następujących ciągów funkcyjnych określonych na $\mathbb{R}_+$:

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$.

36. Zbadać, czy ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^3+x^2}$, jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$.

37. Wyznaczyć funkcję graniczną dla ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ zadanego na $\mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = nx\sin\frac{x}{n}.$$

Zbadać charakter tej zbieżności na zbiorach $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ oraz na przedziałach postaci $[0,a]$, $a>0$.

38. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}$ wzorem $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$. Wyznaczyć funkcję graniczną i zbadać charakter zbieżności tego ciągu funkcyjnego.

39. Niech $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ dla $x\in\mathbb{R}_+$. Wyznaczyć funkcję graniczną i zbadać charakter zbieżności tego ciągu na $\mathbb{R}_+$.

40. Niech $g_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n+\dfrac{x^{2n}}{4}}$ dla $x\geqslant 0$. Wyznaczyć funkcję graniczną i zbadać charakter zbieżności ciągu $\{g_n\}$ na $\mathbb{R}_+$ oraz na przedziałach $[0,1]$ i $[0,2]$.

41. Określmy ciąg funkcyjny $\{h_n\}$ na $\mathbb{R}$ przyjmując, że $h_n(x) = \dfrac{1}{n}[nx]$, gdzie symbol $[y]$ oznacza cechę liczby y. Wyznaczyć funkcję graniczną i zbadać charakter zbieżności tego ciągu na $\mathbb{R}$.

42. Niech $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+x^n}\sin\dfrac{x}{n}$, $n=1,2,\ldots$ Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji granicznej tego ciągu funkcyjnego na przedziale $(-1,\infty)$.

43. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}_+$ następująco:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{dla} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ -n^2 x + 2n & \text{dla} \quad x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ 0 & \text{dla} \quad x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

a) Wyznaczyć funkcję graniczną f ciągu $\{f_n\}$,

b) sprawdzić, czy $f_n \underset{[\frac{1}{3}, \infty)}{\rightrightarrows} f$,

c) sprawdzić, czy $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^2 f_n(x)\,dx = \int\limits_0^2 f(x)\,dx$. Jeżeli nie, to wyjaśnić dlaczego.

44. Dany jest ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ są określone wzorami:
$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n}.$$
Wyznaczyć obszar zbieżności ciągu $\{f_n\}$, funkcję graniczną oraz zbadać, czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie na zbiorach $\mathbb{R}_+$ i $A = [1, 2]$.

45. Dany jest ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \frac{2^n x^2 + n!\,x + 2^n}{(1+x^2)\,n!}.$$
Zbadać, czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$.

46. Niech $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym wzorem
$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx & \text{dla} \quad x \leqslant \frac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{dla} \quad x > \frac{\pi}{n}, \end{cases}$$
$n = 1, 2, \ldots$ Sprawdzić, czy
$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx.$$
Jeżeli nie, to dlaczego?

47. Pokazać, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{n}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, 1]$.

48. Zbadać, czy szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, 1]$.

49. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3x)^{n^2}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$.

50. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ na zbiorze $\mathbb{R}$.

51. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^{2n}}{n^n}.$$

52. Znaleźć promienie zbieżności, przedziały zbieżności i wyznaczyć sumy następujących szeregów potęgowych:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)4^n}$,

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n(n+1)}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}x^{2n}}{n4^n}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} x^{2n}$.

53. Znaleźć sumy szeregów potęgowych:

a) $x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$,

b) $\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots$

54. Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.$$

55. Pokazać, że szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{4n-2}$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale postaci $[-1+a, 1-a]$, gdzie a jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od 1.

Całkując ten szereg wyznaczyć sumę szeregu

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$$

56. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=1+2\cdot 3x+\ldots+n\cdot 3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

Pokazać, że f jest ciągła na przedziale $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Obliczyć

$$\int_0^{0,125} f(x)\,dx.$$

57. Wychodząc z równości $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, znaleźć sumy szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$.

58. Wychodząc z równości $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n}$, znaleźć sumę szeregu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n2^n} + \ldots$$

59. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$. Wykorzystując ten rozkład znaleźć sumę szeregu $1 + \frac{4}{2} + \ldots + \frac{n^2}{2^{n-1}} + \ldots$

60. Wychodząc z równości $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ rozwinąć funkcję $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ w szereg Maclaurina.

61. Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, **b)** $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$,

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$, **d)** $f(x) = \ln(1+x)$,

e) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, **f)** $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$,

g) $f(x) = e^{-x^2}$.

62. Rozwinąć w szereg Fouriera następujące funkcje:

a) $f(x) = x^2$ dla $x \in [-\pi, \pi]$,

b) $f(x) = e^x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$,

c) $f(x) = x(\pi - x)$ dla $x \in (-\pi, \pi)$.

Określić te funkcje poza podanymi przedziałami.

Część C

63. Niech dany będzie ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie $f_n \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ są określone wzorem

$$f_n(x) = \min\{\max\{x-n, 0\}, \max\{n+2-x, 0\}\}.$$

Wyznaczyć obszar zbieżności i funkcję graniczną ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ oraz zbadać charakter jego zbieżności na wyznaczonym obszarze.

64. Pokazać, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie

$$f_n(x) = \frac{x^3+xn^2+x+1}{x^4n^2+x^4+xn^2+x},$$

jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[1,\infty)$. Obliczyć $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$, gdzie f oznacza funkcję graniczną ciągu.

65. Dany jest ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ określony wzorem $f_n(x) = n\sin\left(\sin\frac{x}{n}\right)$. Wyznaczyć obszar zbieżności i funkcję graniczną ciągu $\{f_n\}$.

66. Niech $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Utwórzmy ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ określony na $\mathbb{R}$ przyjmując, że $f_1(x) = f(x)$ oraz $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ dla $n = 1,2,\ldots$ Wyznaczyć obszar zbieżności i funkcję graniczną ciągu $\{f_n\}$ oraz zbadać charakter jego zbieżności na obszarze zbieżności.

67. Niech $f(x) = \sin(x)$ i niech $\{f_n\}$ będzie określony na $\mathbb{R}$ analogicznie jak w zad. 66. Pokazać, że $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$.

68. Wyznaczyć sumę szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ i zbadać, czy jest on zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$.

69. Pokazać, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[a, 2\pi - a]$, gdzie a jest ustaloną liczbą z przedziału $(0,\pi)$.

70. Pokazać, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Wskazówka:. Skorzystać z kryterium Leibniza dla szeregów liczbowych.

71. Niech $f_n\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{dla } x \text{ pozostałych,} \end{cases}$ $n = 1,2,\ldots$ Pokazać, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[1,\infty)$ mimo, że nie ma tutaj zastosowania kryterium Weierstrassa.

72. Zbadać zbieżność jednostajną następujących szeregów funkcyjnych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2}$, dla $x \in \mathbb{R}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, dla $x \in [0, \infty)$.

73. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego
$\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$.

74. Dowieść, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}_+$.

75. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ dla $x \in (-1, 1)$.

ODPOWIEDZI

ROZDZIAŁ I

INDUKCJA MATEMATYCZNA

1. Dla $n = 1$ nasza równość redukuje się do następującej oczywistej równości: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Ustalmy dalej dowolnie $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Należy pokazać, że równość ta jest prawdziwa dla liczby $n+1$, tzn.

$$1+2+\ldots+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Aby to udowodnić zauważmy, że korzystając z założenia mamy:

$$(1+2+\ldots+n)+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Na podstawie zasady indukcji wnioskujemy stąd, że równość jest słuszna dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Dla $n = 1$ mamy $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Załóżmy prawdziwość dowodzonej równości dla ustalonej liczby $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że jest ona prawdziwa dla $n+1$ co oznacza, że

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Aby to udowodnić, przekształćmy lewą stronę, korzystając z założenia:

$$(1^2+2^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+$$

$$+(n+1)^2 = (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} =$$

$$= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

W ten sposób kończymy dowód.

3. Równość w naszym zadaniu jest równoważna (zob. Wskazówka) równości

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

dla każdego $n\in\mathbb{N}$. Dla $n=1$ mamy $1^3=\frac{1\cdot 2^2}{4}$.

Załóżmy teraz, że dowodzona równość jest spełniona dla ustalonej liczby $n\in\mathbb{N}$. Należy sprawdzić jej słuszność dla $n+1$, tzn.

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Aby to udowodnić zauważmy, że korzystając z założenia, mamy:

$$(1^3+2^3+\ldots+n^3)+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$
$$=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+(n+1)\right]=(n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4}=$$
$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

co kończy dowód.

4. Dla $n=1$ teza jest prawdziwa, bo liczba $3^{4+2}+1=730$ jest podzielna przez 10. Ustalmy $n\in\mathbb{N}$ i załóżmy, że liczba $3^{4n+2}+1$ jest podzielna przez 10, co oznacza, że istnieje $k\in\mathbb{N}$ takie, że $3^{4n+2}+1=10k$. Dla liczby $n+1$ mamy:

$$3^{4(n+1)+2}+1=3^{4n+2+4}+1=3^{4n+2}\cdot 3^4+3^4-80=$$
$$=81(3^{4n+2}+1)-80=81\cdot 10k-8\cdot 10=10(81k-8).$$

Ale $81k-8\in\mathbb{N}$, co kończy dowód.

5. Biorąc $n=1$ widzimy, że liczba $13^1-7=6$ jest podzielna przez 6. Załóżmy, że dla ustalonej liczby $n\in\mathbb{N}$ liczba 13^n-7 jest podzielna przez 6, a więc istnieje $k\in\mathbb{N}$ takie, że $13^n-7=6k$.

Dla $n+1$ mamy:

$$13^{n+1}-7=13^n\cdot 13-7=13^n\cdot 13-13\cdot 7+84=$$
$$=13(13^n-7)+6\cdot 14=13\cdot 6k+6\cdot 14=$$
$$=6(13k+14).$$

Zatem $13^{n+1}-7$ jest podzielne przez 6, bowiem $13k+14\in\mathbb{N}$.

6. Jeżeli $n=5$, to nierówność ma postać $2^5>5^2$ i jest prawdziwa. Załóżmy jej prawdziwość dla ustalonej liczby naturalnej n, $n\geqslant 5$. Należy pokazać, że jest ona słuszna dla $n+1$, a więc, że zachodzi

$$2^{n+1}>(n+1)^2.$$

Korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$2^{n+1}=2^n\cdot 2>2n^2=n^2+n^2,$$

a zatem wystarczy tylko sprawdzić, że $n^2 \geqslant 2n+1$ dla $n \geqslant 5$. Zauważmy, że

$$n^2 \geqslant 2n+1 \Leftrightarrow n^2-2n-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow n^2-2n+1 \geqslant 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (n-1)^2 \geqslant 2,$$

co jest oczywiście prawdą dla $n \geqslant 5$.

7. Nierówność nasza w przypadku $n = 1$ redukuje się do równości. Załóżmy, że dla ustalonej dowolnie liczby naturalnej n zachodzi

$$(1+a)^n \geqslant 1+na.$$

Należy pokazać, że $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$.

Aby to udowodnić zauważmy najpierw, że ponieważ $1+a > 0$, to mnożąc obie strony nierówności w założeniu przez $1+a$ otrzymujemy

$$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant$$
$$\geqslant 1+(n+1)a$$

(bo $na^2 \geqslant 0$). Zasada indukcji matematycznej kończy ostatecznie dowód.

8. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Następnie ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że

$$|\sin nx| \leqslant n|\sin x|.$$

Dla $n+1$ mamy:

$$|\sin(n+1)x| = |\sin(nx+x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \leqslant$$
$$\leqslant |\sin nx|\,|\cos x| + |\cos nx|\,|\sin x|.$$

Teraz, korzystając z założenia indukcyjnego i z faktu, że $|\sin x| \leqslant 1$ i $|\cos x| \leqslant 1$, otrzymamy dalej:

$$|\sin(n+1)x| \leqslant n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|.$$

W ten sposób dowód został zakończony.

9. Gdy dysponujemy sumą 4 zł, to $4 = 2+2$. Weźmy więc kwotę n zł, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną, $n \geqslant 4$. Załóżmy, że potrafimy ją wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi. Dołóżmy do tej kwoty 1 zł. Wtedy, jeżeli przy wypłacie kwoty n zł użyliśmy przynajmniej jednej monety 5 zł, to $5+1$ wypłacimy monetami 2 złotowymi. Jeżeli zaś przy wypłacie kwoty n zł użyliśmy samych monet 2 złotowych, to musiało ich być przynajmniej dwie.

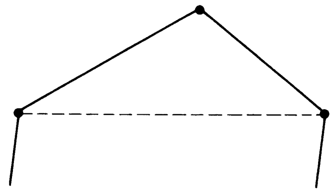
Bierzemy więc dwie monety 2 złotowe, dokładamy 1 zł i wypłacamy tę „końcówkę" monetą 5 zł. Zasada indukcji matematycznej kończy dowód.

10. Oczywiście musi być $n \geqslant 3$. Dla $n = 3$ mamy trójkąt, a z geometrii wiemy, że suma jego kątów wewnętrznych wynosi $\pi = (3-2)\pi$.

Załóżmy, że $n \geqslant 3$ jest ustaloną liczbą naturalną i że suma kątów dowolnego n-kąta wypukłego wynosi $(n-2)\pi$.

Biorąc teraz dowolny $(n+1)$-kąt wypukły widzimy, że „odrzucając" jeden jego wierzchołek i łącząc dwa sąsiednie odcinkiem otrzymujemy n-kąt, którego suma kątów (założenie indukcyjne) wynosi $(n-2)\pi$ (por. rys. 5). Ale suma kątów w naszym $(n+1)$-kącie to $(n-2)\pi+\pi$ (rys. 5). Ostatecznie widzimy, że $(n-2)\pi+\pi = [(n+1)-2]\pi$. W ten sposób mamy dowód i... pytanie do Czytelnika:

Czy założenie o wypukłości jest w naszym zadaniu istotne?



Rys. 5

11. Dla $n = 2$ mamy jeden odcinek, co zapiszemy $1 = \frac{2(2-1)}{2}$. Dla $n = 3$ takich odcinków jest trzy, co też możemy zapisać w formie $3 = \frac{3\cdot(3-1)}{2}$. Podobnie dla $n = 4$ (6 odcinków):

$$6 = \frac{4(4-1)}{2}.$$

Możemy więc przewidywać, że dla n punktów odcinków takich jest $\frac{n(n-1)}{2}$. Załóżmy, że jest to prawdą dla ustalonej dowolnie liczby naturalnej n, $n \geqslant 2$.

Biorąc teraz $n+1$ punktów i wyróżniając jeden z nich jako $n+1$-szy widzimy, że ilość odcinków łączących pozostałe n punktów jest równa $\frac{n(n-1)}{2}$, zaś ten wyróżniony punkt można z pozostałymi połączyć za pomocą n odcinków. Łącznie ilość tych odcinków wynosi

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)-1]}{2}.$$

Stąd, na mocy zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że każde n punktów można połączyć przy pomocy $\frac{n(n-1)}{2}$ odcinków.

12. Liczba przekątnych w n-kącie wypukłym to liczba wszystkich odcinków łączących n punktów minus liczba boków. Zatem, zgodnie z wynikiem z zad. 11 liczba ta wynosi

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2},$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

13. Zauważmy, że dla $n = 1$ równość nasza ma postać:

$$1^2+3^2 = \frac{2\cdot 15}{3}$$

i jest oczywiście prawdziwa. Drugi „krok” indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi. W razie kłopotów radzimy prześledzić rozwiązania zadań 1, 2 lub 3.

14. Dla $n=1$ mamy $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$. Załóżmy prawdziwość dowodzonej równości dla ustalonej liczby $n\in\mathbb{N}$. Wtedy należy pokazać, że dla liczby $n+1$ zachodzi równość

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+$$
$$+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

W tym celu przekształcamy lewą stronę, korzystając z założenia:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

i w ten sposób przekonujemy się o słuszności równości dla liczby $n+1$. Zasada indukcji pozwala zakończyć dowód.

15. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi, który w razie potrzeby może wzorować się na rozwiązaniu zad. 14.

16. Dla $n=0$ mamy

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=\binom{0}{0}a^0b^0=1=(a+b)^0.$$

Załóżmy, że dla ustalonego $n\geqslant 0$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=(a+b)^n.$$

Wówczas

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k}=$$
$$=a\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{k-1}b^{n-(k-1)}+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k-1}b^{n-k}+$$
$$+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=a(a+b)^n+b(a+b)^n=(a+b)^n(a+b)=(a+b)^{n+1},$$

a więc wzór jest słuszny dla każdego $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

17. Zawarty w zadaniu wzór można oczywiście udowodnić przy pomocy zasady indukcji. W prostszy sposób przeprowadzamy dowód opierając się na równości z zad. 3 i zauważając, że:

$$2^3+4^3+\ldots+(2n)^3 = 2^3(1^3+2^3+\ldots+n^3)$$

oraz

$$2(2+4+\ldots+2n)^2 = 2\cdot 2^2(1+2+\ldots+n)^2.$$

18. Jeżeli $n=1$, to mamy $\sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$, co jest oczywiście prawdą, bowiem $2\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

Załóżmy dalej prawdziwość wzoru dla ustalonego $n\in\mathbb{N}$. Dla liczby $n+1$ mamy:

$$\left(\sin\frac{\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{3}\right)+\sin\frac{(n+1)\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{(n+1)\pi}{6}+$$
$$+\sin\frac{(n+1)\pi}{3} = 2\sin\frac{n\pi}{6}\cdot\sin\frac{(n+1)\pi}{6}+2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\cdot\cos\frac{(n+1)\pi}{6} =$$
$$= 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\sin\frac{n\pi}{6}+\cos\frac{(n+1)\pi}{6}\right) =$$
$$= 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left[\sin\frac{n\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n+1}{6}\pi\right)\right] =$$
$$= 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\cdot 2\sin\frac{(n+2)\pi}{6}\cos\left(-\frac{2}{6}\pi\right) =$$
$$= 2\sin\frac{n+1}{6}\pi\cdot 2\sin\frac{n+2}{6}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\sin\frac{(n+2)\pi}{6}.$$

Zatem wzór jest słuszny dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

19. Dla $n=1$ liczba $4+15-1=18$ jest podzielna przez 9. Załóżmy więc, że dla ustalonego $n\in\mathbb{N}$ liczba $4^n+15n-1$ jest podzielna przez 9, a zatem istnieje $k\in\mathbb{N}$ takie, że $4^n+15n-1=9k$. Należy pokazać, że jest to prawdą dla $n+1$, tzn., że liczba $4^{n+1}+15(n+1)-1$ jest podzielna przez 9. Istotnie

$$4^{n+1}+15(n+1)-1 = 4\cdot 4^n+15n+15-1 =$$
$$= (4\cdot 4^n+4\cdot 15n-4)+18 = 4(4^n+15n-1)+2\cdot 9 =$$
$$= 4\cdot 9k+2\cdot 9 = 9(4k+2).$$

20. Biorąc $n=1$ otrzymujemy, że $10^1+4^1-2=12$ jest podzielne przez 3. Ustalmy $n\in\mathbb{N}$ i załóżmy, że istnieje $k\in\mathbb{N}$ takie, że $10^n+4^n-2=3k$. Dla liczby $n+1$ mamy dowieść, że $10^{n+1}+4^{n+1}-2$ jest podzielne przez 3. Mamy:

$$10^{n+1}+4^{n+1}-2 = 10\cdot 10^n+4\cdot 4^n-2 = (10\cdot 10^n+10\cdot 4^n-10\cdot 2)+$$
$$+(-6\cdot 4^n+18).$$

Czytelnik zechce dokończyć dowód, co nie powinno być trudne.

21. Dla $n = 1$ liczba $1^3+2\cdot 1 = 3$ dzieli się przez 3. Załóżmy, że n^3+2n jest podzielne przez 3 dla ustalonego $n\in\mathbb{N}$, tzn. $n^3+2n = 3k$, gdzie $k\in\mathbb{N}$. Wtedy dla $n+1$ mamy

$$\begin{aligned}&(n+1)^3+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+2n+2 =\\&= (n^3+2n)+(3n^2+3n+3) = 3k+3(n^2+n+1) = 3[k+(n^2+n+1)],\end{aligned}$$

co kończy dowód.

22. Dowód zawartego w zadaniu stwierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi (por. rozwiązanie zad. 20).

23. Sprawdzenie dla $n = 1$ pozostawiamy Czytelnikowi. Załóżmy, że dla ustalonej liczby $n\in\mathbb{N}$ istnieje $k\in\mathbb{Z}$ takie, że $2^{6n+1}+3^{2n+2} = 11k$. Mamy pokazać, że $2^{6(n+1)+1}+3^{2(n+1)+2}$ dzieli się również przez 11. Ale

$$\begin{aligned}&2^{6(n+1)+1}+3^{2(n+1)+2} = 2^{6n+1}\cdot 2^6+3^{2n+2}\cdot 3^2 =\\&= 64\cdot 2^{6n+1}+9\cdot 3^{2n+2} = 64(2^{6n+1}+3^{2n+2})-55\cdot 3^{2n+2} =\\&= 64\cdot 11k-5\cdot 11\cdot 3^{2n+2} = 11(64k-5\cdot 3^{2n+2}).\end{aligned}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że $64k-5\cdot 3^{2n+2}\in\mathbb{Z}$. Zasada indukcji dopowiada resztę.

24. Dla $n = 2$ otrzymujemy, że $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, co nietrudno sprawdzić. Ustalmy $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ i załóżmy, że

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Mamy pokazać, że

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}.$$

Korzystając z założenia otrzymujemy, że

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

a zatem wystarczy pokazać, że $\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n+1}$. Mamy:

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)}+1 \geqslant n+1 \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \geqslant n \Leftrightarrow n^2+n \geqslant n^2 \Leftrightarrow n \geqslant 0.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa. Powołując się na zasadę indukcji, kończymy dowód.

25. Dla $n = 1$ otrzymujemy, że $11^{1+2}+12^{2+1} = 3059 = 133\cdot 23$. Załóżmy więc, że nasze stwierdzenie jest prawdziwe dla ustalonej dowolnie liczby naturalnej n, tzn. $11^{n+2}+12^{2n+1} = 133k$. Dla liczby $n+1$ mamy wówczas

$$11^{n+1+2}+12^{2n+3} = 11^{n+2}\cdot 11+12^{2n+1}\cdot 144 = 144(11^{n+2}+12^{2n+1})-$$
$$-133\cdot 11^{n+2} = 144\cdot 133k-133\cdot 11^{n+2} = 133(144k-11^{n+2}).$$

26. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy więc, że $n^7-n = 7k$, gdzie $k\in\mathbb{N}$. Musimy dalej pokazać, że $(n+1)^7-(n+1)$ jest podzielne przez 7. Postępujemy w następujący sposób:

$$(n+1)^7-(n+1) = n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+$$
$$+21n^2+7n+1-n-1 = (n^7-n)+7(n^6+3n^5+5n^4+5n^3+3n^2+n)$$

i stąd już widać koniec dowodu.

27. Czytelnik spróbuje sam udowodnić, że n^3-n jest podzielne przez 6 dla $n\in\mathbb{N}$. W razie kłopotów radzimy „trening" polegający na rozwiązaniu zad. 26.

28. Nierówność jest łatwa do sprawdzenia dla $n = 2$. Załóżmy, że jest prawdziwa dla ustalonego $n\in\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, tzn. że

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) > 1+a_1+\dots+a_n.$$

Mnożąc obie strony przez $1+a_{n+1} > 0$ (założenie!) otrzymujemy

$$(1+a_1)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1}) > (1+a_1+\dots+a_n)(1+a_{n+1}) =$$
$$= 1+a_1+\dots+a_n+a_{n+1}+a_{n+1}(a_1+\dots+a_n) \geqslant$$
$$\geqslant 1+a_1+\dots+a_n+a_{n+1},$$

bo $a_{n+1}(a_1+\dots+a_n) \geqslant 0$. I koniec dowodu.

29. Ponieważ n ma być parzyste, więc zadanie jest równoważne pokazaniu, że $(2k)^3+20\cdot 2k = 8k^3+40k$ jest podzielne przez 48 dla każdego $k\in\mathbb{N}$.

Dla $k = 1$ jest to oczywiście prawdą. Załóżmy dalej, że jest to prawdą dla ustalonego $k \geqslant 1$. Dla liczby $k+1$ mamy więc do pokazania, że $8(k+1)^3+40(k+1)$ dzieli się przez 48. Ale

$$8(k+1)^3+40(k+1) = 8(k^3+3k^2+3k+1)+40k+40 =$$
$$= (8k^3+40k)+(24k^2+24k+48) =$$
$$= (8k^3+40k)+24(k^2+k+2).$$

Ponieważ k^2+k jest zawsze liczbą parzystą, więc $24(k^2+k+2)$ dzieli się przez 48 i z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że $8(k+1)^3+40(k+1)$ jest podzielne przez 48. Resztę uzupełnia zasada indukcji.

30. Biorąc $n = 1$ mamy $1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Załóżmy, że równość z zadania jest prawdziwa dla ustalonego $n\in\mathbb{N}$. Musimy pokazać jej prawdziwość dla $n+1$, a więc

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} =$$
$$= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.$$

Mamy:

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=$$
$$=\left(\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)}=$$
$$=\left(\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2n+2}.$$

Koniec dowodu.

31. Dla $n=1$ mamy: $1=\dfrac{10^2-9-10}{81}$. Ustalmy dalej $n\in\mathbb{N}$ i załóżmy, że

$$1+11+111+\ldots+\underbrace{1\ldots1}_{n}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}.$$

Dla $n+1$ mamy wtedy:

$$(1+11+11+\ldots+\underbrace{1\ldots1}_{n})+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}=$$
$$=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}+10^n+10^{n-1}+\ldots+10+1=$$
$$=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}+\frac{10^{n+1}-1}{9}=$$
$$=\frac{10^{n+1}-9n-10+9\cdot10^{n+1}-9}{81}=$$
$$=\frac{(10^{n+1}+9\cdot10^{n+1})-(9n+9)-10}{81}=$$
$$=\frac{10\cdot10^{n+1}-9(n+1)-10}{81}=\frac{10^{n+2}-9(n+1)-10}{81}.$$

Oznacza to, że wzór jest słuszny dla $n+1$. Korzystając z zasady indukcji możemy zakończyć dowód.

32. Pozostawiamy Czytelnika z tym zadaniem „sam na sam". Podobne było zad. 18 i będzie zad. 40b.

33. Dla $n=2$ mamy

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>2(\sqrt{3}-1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}>\sqrt{3}-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}}>\sqrt{3}-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{8}>3+\frac{9}{4}-3\sqrt{3}\Leftrightarrow3\sqrt{3}>\frac{41}{8}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow27>\frac{1681}{64}.$$

Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla ustalonej liczby $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Należy pokazać, że:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+2}-1).$$

W tym celu zauważmy, że korzystając z założenia mamy:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

i wystarczy tylko pokazać, że

$$2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2(\sqrt{n+2}-1).$$

Ale

$$2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2(\sqrt{n+2}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(n+1-\sqrt{n+1})+1 \geqslant 2\sqrt{(n+2)(n+1)}-2\sqrt{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n+3 \geqslant 2\sqrt{(n+2)(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2+12n+9 \geqslant 4n^2+12n+8 \Leftrightarrow 1 \geqslant 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa. Zatem, zasada indukcji matematycznej kończy pracę.

34. Przypadek dla $n = 1$ jest trywialny. Załóżmy prawdziwość nierówności dla ustalonej dowolnie liczby naturalnej n. Należy pokazać jej prawdziwość dla $n+1$, tzn. że

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{1}{n+1}.$$

Ale z założenia mamy:

$$\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Przekształcając prawą stronę otrzymujemy:

$$2-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2} = 2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}.$$

Wystarczy teraz pokazać, że

$$2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{1}{n+1}.$$

Mamy:

$$2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \geqslant \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n+1 \geqslant n(n+1) \Leftrightarrow 1 \geqslant 0.$$

Prawdziwość ostatniej nierówności (i zasada indukcji) implikuje prawdziwość nierówności z naszego zadania.

35. Gdy $n = 1$, to nierówność ma postać

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{3+1}>1,$$

lub inaczej

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1,$$

a więc jest prawdziwa. Załóżmy jej prawdziwość dla ustalonej liczby $n \in \mathbb{N}$. Mamy pokazać, że

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>1.$$

Lewą stronę powyższej nierówności przekształcamy na mocy założenia następująco:

$$\left(\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}\right)>$$
$$>1-\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}\right)=1-\left(\frac{3}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}\right)+$$
$$+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}=1-\frac{2}{3n+3}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}.$$

Wystarczy teraz pokazać, że $1-\frac{2}{3n+3}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}>1$, lub równoważnie

$$\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}>\frac{2}{3n+3}.$$

Ale

$$\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}>\frac{2}{3n+3}\Leftrightarrow(3n+3)(3n+4)+$$
$$+(3n+3)(3n+2)\geqslant 2(3n+2)(3n+4)\Leftrightarrow 9n^2+21n+$$
$$+12+9n^2+15n+6\geqslant 18n^2+36n+16\Leftrightarrow 2\geqslant 0.$$

Prawdziwość ostatniej nierówności łącznie z zasadą indukcyjną pozwala zakończyć dowód.

36. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista, bo $a+b<2(a+b)$, co jest implikowane przez założenie: $a>0$, $b>0$.

Załóżmy, że dla ustalonej dowolnie liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(a+b)^n<2^n(a^n+b^n).$$

Dla liczby $n+1$, korzystając z założenia, otrzymamy:

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n(a+b)<2^n(a^n+b^n)(a+b)=$$
$$=2^n(a^{n+1}+b^{n+1})+2^n(ab^n+ba^n).$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$2^n(a^{n+1}+b^{n+1})+2^n(ab^n+ba^n)\leqslant 2^{n+1}(a^{n+1}+b^{n+1})$$

lub równoważnie

$$2^n(ab^n+ba^n) \leqslant 2^n(a^{n+1}+b^{n+1}).$$

Ostatnia nierówność jest równoważna następującej:

$$(a-b)(b^n-a^n) \leqslant 0,$$

ta zaś jest prawdziwa, gdyż liczby $a-b$ i b^n-a^n są albo przeciwnego znaku, albo równocześnie równe zeru. Koniec dowodu.

37. Pozostawimy to zadanie jako samodzielne ćwiczenie. Czytelnik może nabrać potrzebnej tutaj wprawy przy rozwiązywaniu zad. 2, 3, 13.

38. Dla $n = 3$ mamy, że $3^3 = 27 > 3 \cdot 2^3 = 24$. Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ i załóżmy, że $3^n > n \cdot 2^n$. Stąd dla $n+1$ mamy

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3n \cdot 2^n,$$

a więc wystarczy pokazać, że $3n2^n > (n+1)2^{n+1}$. Ale

$$3n2^n > 2^n \cdot 2(n+1) \Leftrightarrow 3n > 2(n+1) \Leftrightarrow n \geqslant 2,$$

a to jest prawdą. Zasada indukcji kończy ostatecznie dowód.

39. Równość jest oczywista dla $n = 2$. Ustalmy teraz dowolnie liczbę naturalną n i załóżmy, że nasza równość

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$$

jest prawdziwa dla n. Pokażemy, że jest ona prawdziwa dla liczby $n+1$, tzn.

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}.$$

Korzystając z założenia indukcyjnego mamy:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n} + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} =$$

$$= \frac{n-1}{a_1(a_{n+1}-r)} + \frac{1}{(a_{n+1}-r)a_{n+1}} = \frac{(n-1)a_{n+1}+a_1}{a_1 \cdot a_{n+1}(a_{n+1}-r)} =$$

$$= \frac{na_{n+1}-a_{n+1}+a_1}{a_1 \cdot a_{n+1}(a_{n+1}-r)} = \frac{na_{n+1}-a_1-nr+a_1}{a_1 \cdot a_{n+1}(a_{n+1}-r)} =$$

$$= \frac{n(a_{n+1}-r)}{a_1 \cdot a_{n+1}(a_{n+1}-r)} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}},$$

gdzie r oznacza różnicę w ciągu arytmetycznym $\{a_n\}$. Koniec dowodu.

40. a) Dla $n = 1$ mamy

$$\frac{1}{2} + \cos x = \frac{1+2\cos x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

a więc wzór jest słuszny dla $n = 1$.

Ustalmy teraz liczbę naturalną n i załóżmy, że

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Wtedy

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos(n+1)x =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

co oznacza słuszność wzoru dla liczby $n+1$ i kończy dowód na mocy zasady indukcji matematycznej.

Uwaga. W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).$$

b) Dla $n = 1$ mamy

$$\sin x = \frac{2\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

co oznacza słuszność naszego wzoru dla $n = 1$.

Ustalmy teraz liczbę naturalną n i załóżmy, że

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Dla liczby $n+1$ mamy wtedy:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + \sin(n+1)x =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

a więc na podstawie zasady indukcji wzór jest słuszny dla każdego n naturalnego.

c) Korzystając z udowodnionego w punkcie a wzoru mamy:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x+\pi) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x+\pi)}{2\sin\frac{x+\pi}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

Koniec dowodu.

41. Dla $n = 1$ otrzymujemy $1 = (-1)^0 \frac{1\cdot 2}{2}$. Prawda.

Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że

$$1^2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dla liczby $n+1$ mamy wtedy:

$$(1^2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2) + (-1)^n (n+1)^2 =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n (n+1)^2 =$$

$$= (-1)^n (n+1)\left[-\frac{n}{2} + (n+1)\right] = (-1)^n (n+1) \frac{-n+2n+2}{2} =$$

$$= (-1)^n (n+1) \frac{n+2}{2} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Zatem równość jest prawdziwa dla liczby $n+1$. Na podstawie zasady indukcji matematycznej jest ona prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

42. Pozostawiamy to zadanie do samodzielnego rozwiązania przez Czytelnika. Można się przy tym wzorować na rozwiązaniu zad. 8.

43. Wskazówka: Podstawić we wzorze dwumianowym (zad. 16) $a = b = 1$.

44. Wskazówka: Podstawić we wzorze dwumianowym (zad. 16) $a = 1$, $b = -1$.

45. Zadań w tym „stylu" już trochę było, np. zad. 4, 20, 22, 23, 25. Rozwiązanie naszego zadania można więc wzorować na rozwiązaniach wspomnianych zadań.

46. Weźmy $n = 1$. Wtedy liczba $2^{1+2} \cdot 3^1 + 5 \cdot 1 - 4 = 25$ jest oczywiście podzielna przez 25.

Załóżmy, że liczba $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ jest podzielna przez 25, tzn. istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4 = 25k$. Zgodnie z zasadą indukcji należy pokazać, że jest to prawdą dla liczby $n+1$. Mamy:

$$2^{n+3} \cdot 3^{n+1} + 5(n+1) - 4 = 2 \cdot 2^{n+2} \cdot 3 \cdot 3^n + 5n + 5 - 4 =$$
$$= 6 \cdot 2^{n+2} \cdot 3^n + 30n - 24 - 25n + 25 = 6(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) +$$
$$+ 25(-n+1) = 6 \cdot 25k + 25(-n+1) = 25(6k - n + 1).$$

Ponieważ $6k - n + 1 \in \mathbb{Z}$, więc wszystko w tym zadaniu jest zrobione.

47. Startujemy od liczby $n = 2$. Wtedy $2^{2^2} - 6 = 16 - 6 = 10$. Oczywiście 10 dzieli się przez 10.

Dalej, ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $2^{2^n} - 6$ dzieli się przez 10, co oznacza istnienie $k \in \mathbb{N}$ takiego, że $2^{2^n} - 6 = 10k$. Trzeba teraz pokazać, że stwierdzenie z zadania jest prawdziwe dla $n+1$. Mamy:

$$2^{2^{n+1}} - 6 = 2^{2^n \cdot 2} - 6 = (2^{2^n})^2 - 36 + 30 =$$
$$= [(2^{2^n})^2 - 6^2] + 30 = (2^{2^n} - 6)(2^{2^n} + 6) + 30 =$$
$$= 10k(2^{2^n} + 6) + 3 \cdot 10.$$

Ponieważ ostatnio otrzymana liczba jest naturalna, więc dowód (poprzez zasadę indukcji) jest zakończony.

48. Radzimy przeczytać rozwiązania zad. 21, 26 lub 27. Wtedy dowód twierdzenia w naszym zadaniu nie powinien być trudny.

49. Najpierw trochę poobliczamy. Mamy:

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n^2 + 3n + 2)}{6} =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Możemy teraz pójść dwoma drogami.

Pierwsza z nich polega na zauważeniu, że

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}.$$

Teraz wystarczy wykorzystać odpowiednio stwierdzenie zawarte w naszym następnym zadaniu (zad. 50).

Druga możliwość to zasada indukcji. Zauważmy mianowicie, że dla $n = 1$ liczba $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ jest naturalna. Następnie, ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N}$. Zastępując n przez $n+1$ mamy:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{3(n+1)(n+2)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Aby zakończyć dowód wystarczy tylko zauważyć, że liczba $(n+1)(n+2)$ jest parzysta. Koniec pracy.

50. Twierdzenie jest słuszne dla $n = 0$. Ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla tego n i dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Biorąc teraz liczbę $n+1$ zauważmy najpierw, że $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Następnie jeżeli $k \in \mathbb{N}$ i $1 \leqslant k \leqslant n$, wykorzystując znane własności symbolu Newtona otrzymujemy

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k},$$

a więc $\binom{n+1}{k}$ jako suma liczb całkowitych $\binom{n}{k-1}$ oraz $\binom{n}{k}$ (założenie indukcyjne) jest liczbą całkowitą. To wszystko.

51. Dla $n = 1$ mamy, że $10^2 - 10 \cdot 2 + 1 = 81$. Załóżmy, że dla ustalonej dowolnie liczby $n \in \mathbb{N}$ liczba $10^{n+1} - 10(n+1) + n$ dzieli się przez 81. Pokażemy, że twierdzenie jest słuszne dla $n+1$, tzn., że liczba $10^{n+2} - 10(n+2) + n + 1$ dzieli się przez 81. Mamy:

$$10^{n+2} - 10(n+2) + n + 1 = 10 \cdot 10^{n+1} - 10(n+1) - 10 + n + 1 =$$
$$= [10 \cdot 10^{n+1} - 10^2(n+1) + 10n] + [90(n+1) - 9n - 9] =$$
$$= 10[10^{n+1} - 10(n+1) + n] + 81n + 81 =$$
$$= 10[10^{n+1} - 10(n+1) + n] + 81(n+1).$$

Reszta jest już prosta.

52. Gdy $n = 1$, twierdzenie jest oczywiste. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że wielomian $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ dzieli się przez $x^2 - 2x + 1$. Dla liczby $n+1$ mamy:

$$(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1 = nx \cdot x^{n+1} + x^{n+2} - (n+1)x \cdot x^n -$$
$$- x^{n+1} + 1 = x[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1] + [x^{n+2} - x^{n+1} - x + 1] =$$
$$= x[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1] + (x-1)(x^{n+1} - 1) =$$
$$= x[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1] + (x^2 - 2x + 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1).$$

Korzystając teraz z założenia indukcyjnego wnioskujemy już łatwo o prawdziwości naszego twierdzenia dla $n+1$. To wszystko.

53. Weźmy $n = 2$ i dwie liczby dodatnie x_1, x_2 takie, że $x_1 \cdot x_2 = 1$. Należy pokazać, że $x_1+x_2 \geqslant 2$. Ale $x_1+x_2 = x_1+\frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2+1}{x_1}$, skąd:

$$x_1+x_2 \geqslant 2 \Leftrightarrow x_1^2+1 \geqslant 2x_1 \Leftrightarrow (x_1-1)^2 \geqslant 0,$$

a to jest prawdą.

Załóżmy dalej, że twierdzenie jest prawdziwe dla ustalonej liczby n, $n \geqslant 2$. Weźmy dalej $n+1$ liczb dodatnich $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y_{n+1} i takich, że $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_{n-1} \cdot y_n \cdot y_{n+1} = 1$. Jeżeli $y_i = 1$ dla $i = 1, \ldots, n+1$, twierdzenie jest oczywiste. Jeżeli nie wszystkie te liczby są równe 1, to musi być wśród nich jedna większa i druga mniejsza od 1. Załóżmy, że liczby te są tak ponumerowane, że $y_n < 1$, $y_{n+1} > 1$. Wtedy pisząc iloczyn w postaci

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_{n-1}(y_n \cdot y_{n+1}) = 1$$

i wykorzystując założenie, otrzymamy, że

$$y_1+y_2+ \ldots +y_{n-1}+y_n y_{n+1} \geqslant n.$$

Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że

$$n-y_n \cdot y_{n+1} \geqslant n+1-y_n-y_{n+1}.$$

Ale

$$n-y_n \cdot y_{n+1} \geqslant n+1-y_n-y_{n+1} \Leftrightarrow y_n-y_n \cdot y_{n+1} \geqslant$$
$$\geqslant 1-y_{n+1} \Leftrightarrow y_n(1-y_{n+1}) \geqslant 1-y_{n+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y_n-1)(1-y_{n+1}) \geqslant 0,$$

a to jest prawdą. Zatem nasze twierdzenie jest prawdziwe dla liczby $n+1$. Na mocy zasady indukcji jest ono prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

54. Jeżeli przynajmniej jedna z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest równa 0, nierówność jest oczywista. Załóżmy więc, że $x_i > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ i określmy

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Oczywiście $y_i > 0$ oraz $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$. Korzystając z zad. 53 wnioskujemy stąd, że $y_1+y_2+ \ldots +y_n \geqslant n$. Nierówność ta jest, jak łatwo sprawdzić, równoważna naszej nierówności.

55. W nierówności z zad. 54 przyjmujemy $x_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy mamy

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{1+2+ \ldots +n}{n}$$

lub równoważnie

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

56. Nierówność ta jest szczególnym przypadkiem nierówności z zad. 54, jeżeli przyjmiemy w niej $x_i = i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sprawdzić to (skorzystać z zad. 2).

57. Jeżeli przyjmiemy $y_1 = \frac{x_1}{x_2}, y_2 = \frac{x_2}{x_3}, \dots, y_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}, y_n = \frac{x_n}{x_1}$, to widać, że $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n = 1$. Z zad. 53 wynika teraz, że $y_1 + y_2 + \dots + y_n \geqslant n$, a to jest już nasza nierówność.

58. Łatwo obliczyć (bawiąc się np. monetami), że dla $n = 1$ mamy tylko jeden ruch, co zapisujemy w postaci $2^1 - 1$, zaś dla $n = 2$ są trzy ruchy, co piszemy jako $2^2 - 1$. Stąd można wnioskować, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ minimalna ilość ruchów potrzebnych do zbudowania piramidy na trzecim polu jest równa $2^n - 1$.

Udowodnimy to stosując zasadę indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ mamy już to sprawdzone. Ustalmy teraz dowolnie $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że nasze twierdzenie jest prawdziwe dla n. Weźmy następnie piramidę z $n+1$ krążków na pierwszym polu. Korzystając z założenia budujemy w $2^n - 1$ ruchach piramidę z n krążków (nie ruszając tego dolnego z pierwszego pola) na drugim polu. Następnie największy krążek przenosimy z pierwszego pola na trzecie i piramidę z drugiego pola w $2^n - 1$ ruchach ustawiamy na największym krążku na trzecim polu.

Łączna liczba ruchów wynosi: $2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$. Koniec dowodu.

59. a) Dla $n = 1$ nierówność jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla ustalonej liczby $n \in \mathbb{N}$. Dla liczby $n+1$ mamy:

$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k + n^k \leqslant \frac{n^{k+1}}{k+1} + n^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k+1}\left[\binom{k+1}{0} n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \dots + \binom{k+1}{k+1}\right] = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}.$$

Ostatecznie dowodzi to nierówności dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

b) Podobnie sprawdzamy, że nierówność jest prawdziwa dla $n = 1$. Jeżeli jest ona prawdziwa dla n, to zachodzi też dla $n+1$, gdyż:

$$\frac{n^{1-1/k}}{1-1/k} + (n+1)^{-1/k} \leqslant \frac{(n+1)^{1-1/k}}{1-1/k} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{nk}\right)^k.$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa na mocy nierówności Bernoulliego (por. zad. 7):

$$\frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{nk}\right)^k \geqslant \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Koniec dowodu.

60. Określmy funkcję $B_n(x)$ przyjmując, że $B_n(x) = (1+x)^n$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną. Zauważmy, że:

$$B_n(x) \cdot B_m(x) = (1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m} = B_{n+m}(x),$$

dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$. Z zad. 16 otrzymujemy, że

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n.$$

Teraz, porównując współczynniki po obydwu stronach równości $B_n(x) \cdot B_m(x) = $ $= B_{n+m}(x)$ otrzymujemy żądaną równość.

61. Podstawiając w równości z zad. 60 $m = k = n$ i korzystając z faktu, że $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ łatwo otrzymujemy równość występującą w naszym zadaniu.

62. Ograniczymy się do wskazówki, która jednak powinna być wystarczająca:

Jeżeli mamy na płaszczyźnie n prostych i poprowadzimy, zgodnie z warunkami zadania, $n+1$-szą prostą, to przecina ona każdą z n prostych dzieląc przy tym każdy z $n+1$ poprzednio wyznaczonych obszarów na dwie części.

Odpowiedź: $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

63. Dla $n = 1$ nie ma obszarów ograniczonych. Załóżmy teraz, że dla n prostych jest nie więcej niż $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych. Następna, $n+1$-sza prosta daje co najwyżej $n-1$ nowych obszarów ograniczonych, gdyż jest nie więcej niż n punktów przecięcia z pozostałymi prostymi, a więc nie więcej niż $n-1$ odcinków, które mogą być brzegami obszarów ograniczonych. W sumie otrzymujemy nie więcej niż $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + n - 1 = (n-1)\left[\frac{1}{2}(n-2) + 1\right] =$ $= \frac{1}{2}n(n-1)$ obszarów ograniczonych dla $n+1$ prostych. Zasada indukcji kończy dowód.

64. Dla $n = 1$ równość jest oczywista. Załóżmy więc, że jest ona prawdziwa dla n. Dla $n+1$ mamy:

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(n+1)^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{1}{2(n+1)^2} = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{2(n+1)^2}} = \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2}.$$

Koniec dowodu.

Uwaga. Skorzystaliśmy tutaj ze wzoru $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. Wzór ten otrzymamy łatwo ze znanego z trygonometrii wzoru

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta'},$$

jeżeli podstawimy $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$.

65. Stosujemy zasadę indukcji. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Przepiszmy teraz naszą nierówność w równoważnej postaci

$$n! \geqslant (n+1)^n e^{-n}.$$

Zauważmy, że przy zwiększaniu się n o 1 lewa strona nierówności zwiększa się $n+1$ razy. Dla dowodu kroku indukcyjnego wystarczy więc wykazać, że prawa strona zwiększy się nie więcej niż $n+1$ razy, tzn., że zachodzi nierówność

$$\frac{(n+2)^{n+1}\cdot e^{-(n+1)}}{(n+1)^n\cdot e^{-n}} \leqslant n+1.$$

Przepisując tę nierówność w postaci równoważnej otrzymujemy

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leqslant e,$$

co jest nierównością prawdziwą, gdyż

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to e \text{ przy } n\to\infty$$

i to w sposób rosnący (por. zad. 19 z rozdz. VI).

66. Jeżeli $n = 1$, to nierówność jest prawdziwa, bo $1 > \frac{1}{3}$. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla n. Dla $n+1$ mamy:

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n\cdot(n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Ostatnia nierówność wynika stąd, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e < 3$$

(por. zad. 19 z rozdz. VI).

67. Korzystając z zad. 55 mamy, że $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Stąd

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = e\left(\frac{n}{2}\right)^n\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n} = e\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Również tutaj korzystamy z zad. 19 z rozdz. VI.

68. Dla $n = 1$ mamy $2 < 4 \cdot 1$, więc nierówność jest prawdziwa. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla n. Pokażemy jej prawdziwość dla $n+1$. Mamy:

$$(2n+2)! = (2n)!\,(2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2\,(2n+1)(2n+2) =$$

$$= 2^{2n+2}[(n+1)!]^2\,\frac{2^{2n}(n!)^2\,(2n+1)(2n+2)}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} <$$

$$< 2^{2n+2}[(n+1)!]^2,$$

bowiem

$$\frac{2^{2n}(n!)^2\,(2n+1)(2n+2)}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

Stosując zasadę indukcji kończymy dowód.

69. Biorąc $n = 3$ otrzymujemy: $3^4 = 81 > 4^3 = 64$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ i załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla n. Stąd łatwo otrzymujemy

$$(n+1)^{n+2} > \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}}.$$

Ale $\dfrac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}} > (n+2)^{n+1}$ i koniec dowodu.

70. Nierówność można udowodnić przez indukcję. Jest jednak prostszy dowód, mianowicie:

$$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \ldots +$$

$$+ \binom{2n}{n} + \ldots + \binom{2n}{2n} > \binom{2n}{n}.$$

71. Dla $n = 1$ nierówność oczywiście zachodzi. Załóżmy dalej, że jest ona prawdziwa dla ustalonej liczby naturalnej n. Udowodnimy ją dla liczby $n+1$. Mamy:

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)\,n!\,(n+1)\,n!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} = \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}},$$

co wynika stąd, że $2n+1 = \sqrt{4n^2+4n+1} > \sqrt{4n^2+4n} = 2\sqrt{n(n+1)}$. W ten sposób kończymy dowód.

72. Dla $n = 1$ mamy: $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, co jest prawdą. Zakładając prawdziwość nierówności dla n, mamy dla $n+1$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \cdot \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Teraz zasada indukcji i koniec dowodu.

73. Liczby a_1, a_2 oraz $a_3 = 3, a_4 = 11$ są całkowite, nieparzyste. Przypuśćmy, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są całkowite, gdzie $n \geqslant 4$ jest ustaloną liczbą naturalną. Mamy:

$$a_n^2 + 2 = \left(\frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}\right)^2 + 2 = \frac{a_{n-1}^4 + 4a_{n-1}^2 + 4 + 2a_{n-2}^2}{a_{n-2}^2} =$$

$$= \frac{a_{n-1}^4 + 4a_{n-1}^2 + 2(a_{n-2}^2+2)}{a_{n-2}^2} = \frac{a_{n-1}^4 + 4a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}a_{n-3}}{a_{n-2}^2} =$$

$$= \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^3 + 4a_{n-1} + 2a_{n-3})}{a_{n-2}^2}.$$

Zauważmy, że liczby a_{n-1} i a_{n-2} są względnie pierwsze (a_{n-2} jest nieparzyste, a więc względnie pierwsze z a_{n-2}^2+2), czyli a_n^2+2 dzieli się przez a_{n-1}, a stąd a_{n+1} jest liczbą całkowitą, nieparzystą.

74. Z określenia ciągu $\{c_n\}$ wynika, że wszystkie jego wyrazy są dodatnie. Dalej zauważmy, że

$$\sqrt{1-a} < \sqrt{1-a+\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\left(1-\frac{a}{2}\right)^2} =$$

$$= \left|1-\frac{a}{2}\right| = 1-\frac{a}{2} = 1-c_1.$$

Stąd $b_1 = 1-\sqrt{1-a}-c_1 > 0$.

Ustalmy dalej liczbę naturalną n i załóżmy, że $b_n > 0$. Mamy teraz

$$b_{n+1} = 1-\sqrt{1-a}-c_{n+1} = 1-\sqrt{1-a}-\frac{a+c_n^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}[(1-\sqrt{1-a})^2-c_n^2] =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-a}-c_n)(1-\sqrt{1-a}+c_n) =$$

$$= \frac{1}{2}b_n(1-\sqrt{1-a}+c_n).$$

Ponieważ $c_n > 0$ i $1 > \sqrt{1-a}$, więc $b_{n+1} > 0$. Zasada indukcji kończy dowód.

75. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że każdy układ n punktów ma centrum. Rozpatrzmy punkty $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Niech x będzie centrum dla układu punktów $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Rozważmy zbiór A złożony z punktów, do których można dojść z x w jednym kroku. Są dwie możliwości:

1° Istnieje strzałka z x do a_{n+1}; wtedy x jest centrum dla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$;
2° Każda strzałka łącząca a_{n+1} i $z \in A$ idzie od a_{n+1} do z — wtedy a_{n+1} jest centrum dla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

Koniec dowodu.

76. Wystarczy zauważyć, że $(x^2-x+1)(x^2+x+1) = x^4+x^2+1$. Stąd wynika, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi

$$(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1)(x^{2^n}+x^{2^{n-1}}+1) = x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1.$$

Równość z zadania jest wnioskiem z tych równości. Można to udowodnić za pomocą indukcji matematycznej, co zostawiamy jako samodzielne ćwiczenie.

77. Dla $n = 1$ otrzymujemy, że

$$(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)+(x+1)x^3 = x^7-x^6+x^5-$$
$$-x^4-x^3+x^2-x+1+x^4+x^3 = x^7-x^6+x^5+x^2-$$
$$-x+1 = (x^2-x+1)(x^5+1).$$

Załóżmy, że dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ jest

$$(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)^n+(x+1)x^{4n-1} = q(x)(x^5+1).$$

Pokażemy, że $(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)^{n+1}+(x+1)x^{4n+3}$ też dzieli się przez x^5+1.

Z założenia indukcyjnego

$$(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)^n = q(x)(x^5+1)-(x+1)x^{4n-1},$$

więc

$$(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)^{n+1}+(x+1)x^{4n+3} =$$
$$= [q(x)(x^5+1)-(x+1)x^{4n-1}](x^3-x^2+x-1)+(x+$$
$$+1)x^{4n+3} = q(x)(x^3-x^2+x-1)(x^5+1)+(x+$$
$$+1)x^{4n-1}(-x^3+x^2-x+1+x^4) = q(x)(x^3-x^2+x-$$
$$-1)(x^5+1)+x^{4n-1}(x^5+1),$$

co na mocy zasady indukcji oznacza, że żądana podzielność zachodzi dla każdego naturalnego n.

78. Zauważmy, że

$$\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4} = \frac{1}{24}(n^4+6n^3+11n^2+6n) =$$
$$= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) = \binom{n+3}{4}.$$

Zatem nasze twierdzenie jest wnioskiem z zad. 50.

79. Przyjmijmy $\sqrt[n]{n} = 1+a$. Wtedy oczywiście $a \geqslant 0$. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona (por. zad. 16) mamy:

$$n = (1+a)^n = 1+\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}a^2+\ldots+\binom{n}{n}a^n \geqslant$$
$$\geqslant 1+\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}a^2 \geqslant 1+\binom{n}{2}a^2 = 1+\frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

Stąd $a^2 \leqslant \frac{2}{n}$, a więc

$$\sqrt[n]{n} = 1+a \leqslant 1+\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

80. Dla $n = 1$ mamy

$$\sum_{k=1}^{1} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = \binom{1}{1} a^1 b^0 = a = 1 \cdot a(a+b)^0.$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}.$$

Wówczas

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} k a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= a \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} k a^{k-1} b^{n-(k-1)} + b \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1) a^k b^{n-k} + b \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} + a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$= ana(a+b)^{n-1} + a(a+b)^n + bna(a+b)^{n-1} =$$

$$= na(a+b)^n + a(a+b)^n = (n+1)a(a+b)^n.$$

Zatem wzór jest słuszny dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

81. a) Jest to szczególny przypadek wzoru z zad. 80 dla $a = b = 1$.

b) Jeżeli we wzorze z zad. 80 podstawimy $a = -1$, $b = 1$, to otrzymamy nasz wzór.

Rozdział II

RACHUNEK ZBIORÓW

1. Ponieważ $B \subset A$, więc $A \cup B = A$, $A \cap B = B$.

2. $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, ...\}$, więc $A \cap B = \emptyset$.

3. $A \cap B = \{10, 50, 90, 130, ...\}$.

5. Zbiór A jest na płaszczyźnie xOy kołem o środku w punkcie $O(0,0)$ i promieniu 1. Ponieważ nierówność $x^2 - 2x + y^2 \leqslant 3$ jest równoważna nierówności $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 4$, więc zbiór B jest kołem o środku w punkcie $O_1(1,0)$ i promieniu równym 2. Stąd już łatwo widać (sporządzić rysunek!), że $A \subset B$, a zatem $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$.

6. $a = \sqrt{2}$ lub $a = -\sqrt{2}$.

12. Oznaczmy przez L zbiór stojący po lewej, zaś przez P zbiór stojący po prawej stronie naszej równości. Dla pokazania, że $L = P$ należy udowodnić, że $x \in L \Leftrightarrow x \in P$. Korzystając z definicji sumy i iloczynu zbiorów, mamy:

$$x \in L \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C),$$
$$x \in P \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C).$$

Oznaczmy teraz $x \in A$ przez p, $x \in B$ przez q, zaś $x \in C$ przez r. Wtedy

$$(x \in L \Leftrightarrow x \in P) \Leftrightarrow \{[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]\}.$$

Zdanie po prawej stronie jest znanym prawem logicznym (rozdzielność alternatywy względem koniunkcji), skąd wynika prawdziwość dowodzonej równości.

13. Udowodnimy np. równość a. Zauważmy, że $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sim (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) \Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in (A' \cap B')$, co kończy dowód.

14. Mamy: $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge \sim (x \in B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A \cap B'$.

15. Korzystając z zad. 11 i 14 otrzymujemy:

$(A \cup B) \cap A' = A \cap A' \cup B \cap A' = \emptyset \cup B \cap A' = B \cap A' = B \setminus A$.

17. Korzystamy ze wzorów z zad. 14, 13 oraz 11. Otrzymujemy:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)' =$$
$$= (A \cup B) \cap (A' \cup B') = [A \cap (A' \cup B')] \cup [B \cap (A' \cup B')] =$$
$$= (A \cap A') \cup (A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (B \cap B') =$$
$$= (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

18. Ponieważ $A \cap B \subset A$, więc $A \cup (A \cap B) = A$. Ponadto z tego, że $A \subset A \cup B$ wynika, że $A \cap (A \cup B) = A$.

19. Z zadania 14 i 11 otrzymujemy:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C') =$$
$$= (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

20. Wykorzystujemy związki zawarte w zad. 14, 13 i 11. Mamy wtedy:

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \cap C')' = A \cap (B' \cup C) =$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

21. Biorąc pod uwagę zad. 14, 13 i 10, mamy:

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') =$$
$$= (A \cap B') \cap C' = (A \setminus B) \cap C' = (A \setminus B) \setminus C.$$

22. Korzystamy z zad. 14 i 10:

$$(A \setminus B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset.$$

24. Załóżmy, że A i B są podzbiorami jakiegoś zbioru X. Wtedy, korzystając z zad. 14, 9, 11 i 12, otrzymujemy:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (A \cap B) =$$
$$= [(A \cap B') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A') = [A \cap (B' \cup B)] \cup (B \cap A') =$$
$$= (A \cap X) \cup (B \cap A') = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') =$$
$$= (A \cup B) \cap X = A \cup B.$$

25. Korzystamy z zadań o numerach 11, 14, 10. Mamy:

$$[A \cap (B \cup C)] \setminus B = [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap B' = (A \cap B \cap B') \cup$$
$$\cup (A \cap C \cap B') = (A \cap \emptyset) \cup (A \cap C \cap B') = \emptyset \cup [(A \cap B') \cap C] =$$
$$= (A \setminus B) \cap C.$$

26. Nie. Pokazać to na przykładzie!

27. Udowodnimy dla przykładu punkt a. Korzystając z zad. 14, 13 i 11 mamy:

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') =$$
$$= (A \cap A') \cup (A \cap B') = \emptyset \cup (A \cap B') = A \cap B' = A \setminus B.$$

28. Jeżeli $A \subset B$, to $A \cap B = A$. Stąd i z zad. 14, 13 oraz 11 mamy:

$$B \setminus (B \setminus A) = B \cap (B \cap A')' = B \cap (B' \cup A) =$$
$$= (B \cap B') \cup (B \cap A) = \emptyset \cup A = A.$$

30. Korzystając z zad. 14, 13 i 11 oraz z faktu, że $X \cap Y \subset X$ dla dowolnych X i Y, otrzymujemy:

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \cap B') \cap (C \cap D')' =$$
$$= (A \cap B') \cap (C' \cup D) = (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B' \cap D) \subset$$
$$\subset (A \cap C') \cup (D \cap B') = (A \setminus C) \cup (D \setminus B).$$

31. Z założenia mamy, że są prawdziwe następujące implikacje:

$$x \in A \Rightarrow x \in C, \quad x \in B \Rightarrow x \in D.$$

Aby udowodnić, że $A \cup B \subset C \cup D$ należy wykazać prawdziwość implikacji

$$[(x \in A) \vee (x \in B)] \Rightarrow [(x \in C) \vee (x \in D)].$$

Ze względu na nasze założenia implikacja ta jest zawsze prawdziwa.
Podobnie pokazujemy, że $A \cap B \subset C \cap D$.

32. Należy pokazać prawdziwość implikacji

$$[(x \in A \Rightarrow x \in C) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in D)] \Rightarrow \{[(x \in A) \wedge$$
$$\wedge \sim (x \in D)] \Rightarrow [(x \in C) \wedge \sim (x \in B)]\}.$$

Oznaczmy $x \in A$ przez $p, x \in B$ przez $q, x \in C$ przez r, zaś $x \in D$ przez s. Dla dowodu wystarczy sprawdzić, że następujące wyrażenie jest prawem logicznym

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge \sim s) \Rightarrow (r \wedge \sim q)].$$

Pozostawiamy to Czytelnikowi.

36. a) Jest to powierzchnia walca, którego oś jest równoległa do osi Oz i którego rzut prostopadły na płaszczyznę xOy jest zadanym okręgiem, a rzut prostopadły na oś Oz jest przedziałem (a, b).

37. $A \times B \times C$ liczy $n \cdot m \cdot k$ elementów.

38. a) Mamy:

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge y \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C.$$

Korzystając z rozdzielności koniunkcji względem alternatywy, otrzymujemy dalej:

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge$$
$$\wedge y \in C)] \Leftrightarrow [(x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C),$$

b) $(x, y) \in (A \cap B) \times C \Leftrightarrow [(x \in A \cap B) \wedge y \in C] \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C] \Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in C) \wedge$$
$$\wedge (x \in B \wedge y \in C)] \Leftrightarrow [(x, y) \in A \times C] \wedge$$
$$\wedge (x, y) \in B \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C).$$

Dowód równości z c pozostawiamy Czytelnikowi.

40. Przekształcając lewą stronę naszej równości i korzystając z zad. 38a) oraz 19, otrzymamy:

$$(A\times B)\setminus(C\times D)=\{[(A\setminus C)\cup(A\cap C)]\times B\}\setminus(C\times D)=$$
$$=\{[A\setminus C)\times B]\cup[(A\cap C)\times B]\}\setminus(C\times D)=$$
$$=\{[(A\setminus C)\times B]\setminus(C\times D)\}\cup\{[(A\cap C)\times B]\setminus(C\times D)\}.$$

Stąd już wynika żądana równość, ponieważ

$$[(A\setminus C)\times B]\setminus(C\times D)=(A\setminus C)\times B$$

oraz

$$[(A\cap C)\times B]\setminus(C\times D)=(A\cap C)\times(B\setminus D).$$

Rzeczywiście, mamy:

$$(x,y)\in[(A\setminus C)\times B]\setminus(C\times D)\Leftrightarrow x\in A\wedge\sim(x\in C)\wedge$$
$$\wedge y\in B\wedge[\sim(x\in C)\vee\sim(y\in D)]\Leftrightarrow[x\in A\wedge\sim(x\in C)\wedge$$
$$\wedge y\in B\wedge\sim(x\in C)\vee[x\in A\wedge\sim(x\in C)\wedge y\in B\wedge$$
$$\wedge\sim(y\in D)]\Leftrightarrow[x\in A\wedge\sim(x\in C)\wedge y\in B]\vee$$
$$\vee[x\in A\wedge\sim(x\in C)\wedge y\in B\wedge\sim(y\in D)]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\setminus C\wedge y\in B)\vee(x\in A\setminus C\wedge y\in B\setminus D)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x,y)\in(A\setminus C)\times B,$$

ponieważ $(A\setminus C)\times(B\setminus D)\subset(A\setminus C)\times B$.

Podobnie:

$$(x,y)\in(A\cap C)\times B]\setminus(C\times D)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in C\wedge$$
$$\wedge y\in B)\wedge[\sim(x\in C)\vee\sim(y\in D)]\Leftrightarrow[x\in A\wedge x\in C\wedge$$
$$\wedge y\in B\wedge\sim(x\in C)]\vee[x\in A\wedge x\in C\wedge y\in B\wedge$$
$$\wedge\sim(y\in D)]\Leftrightarrow(x,y)\in\emptyset\vee(x\in A\cap C\wedge$$
$$\wedge y\in B\setminus D)\Leftrightarrow(x,y)\in(A\cap C)\times(B\setminus D).$$

42. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=(1,3]$.

43. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$.

44. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1=[-1,2]$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{1\}$.

45. $A_t=[-t^2,t^2]$ dla $t\in\mathbb{R}$. Stąd $\bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}}A_t=A_0=\{0\}$.

46. Mamy:

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}A_t=\bigcup_{t>0}A_t\cup\bigcup_{t<0}A_t=\bigcup_{t>0}\left(-\infty,\frac{2}{t}\right]\cup\bigcup_{t<0}\left[\frac{2}{t},+\infty\right)=\mathbb{R}\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}.$$

Podobnie

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}A_t=\bigcap_{t>0}A_t\cap\bigcap_{t<0}A_t=(-\infty,0]\cap[0,+\infty)=\{0\}.$$

48. Mamy:

$$x \in A \cap \bigcup_{t \in T} A_t \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \left(\bigvee_{t \in T} x \in A_t \right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bigvee_{t \in T} (x \in A \wedge x \in A_t) \Leftrightarrow \bigvee_{t \in T} x \in A \cap A_t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{t \in T} (A \cap A_t).$$

50. Korzystamy z zad. 14, 8 i 48; otrzymujemy wtedy:

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right) \setminus A = \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right) \cap A' = \bigcup_{t \in T} (A_t \cap A') = \bigcup_{t \in T} (A_t \setminus A).$$

54. Wskazówka: Skorzystać z zad. 17.

55. Stosując wzory z zad. 14, 11 i 13, otrzymujemy:

$$A' \triangle B = (A' \setminus B) \cup (B \setminus A') = (A' \cap B') \cup (B \cap A) =$$
$$= (A \cup B)' \cup (A \cap B) = [(A \cup B) \cap (A \cap B)']' = [(A \cup B) \cap$$
$$\cap (A' \cup B')]' = \{[(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']\}' =$$
$$= [(B \setminus A) \cup (A \setminus B)]' = (A \triangle B)'.$$

Druga równość jest prostą konsekwencją zad. 54.

56. Korzystając z zad. 14 i 55 możemy lewą stronę L oraz prawą stronę P naszej równości przekształcić następująco:

$$L = (A \triangle B) \triangle C = [(A \triangle B) \cap C'] \cup [C \cap (A \triangle B)'] =$$
$$= [(A \triangle B) \cap C'] \cup [C \cap (A' \triangle B)] = \{[(A \cap B') \cup$$
$$\cup (B \cap A')] \cap C'\} \cup \{C \cap [(A' \cap B') \cup (B \cap A)]\} =$$
$$= [(A \cap B' \cap C') \cup (B \cap A' \cap C')] \cup$$
$$\cup [(C \cap A' \cap B') \cup (A \cap B \cap C)],$$

$$P = A \triangle (B \triangle C) = [A \cap (B \triangle C)'] \cup [(B \triangle C \cap A'] =$$
$$= [A \cap (B' \triangle C)] \cup \{[B \cap C') \cup (C \cap B') \cap A'\} =$$
$$= (A \cap [(B' \cap C') \cup (B \cap C)]\} \cup [(A' \cap B \cap C') \cup$$
$$\cup (A' \cap B' \cap C)] = [(A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C)] \cup$$
$$\cup [(A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)].$$

Stąd już widać, że $L = P$.

57. Stosując związki ustalone w zad. 14 i 11, mamy:

$$A \cap (B \triangle C) = A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] = [A \cap (B \setminus C)] \cup$$
$$\cup [A \cap (C \setminus B)] = (A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') =$$
$$= [(A \cap B) \setminus C] \cup [(A \cap C) \setminus B].$$

Ponieważ $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ oraz $(A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (A \cap B)$ (sprawdzić!), więc ostatecznie

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

59. Biorąc pod uwagę zad. 56 i 58, otrzymujemy:
$A \triangle (A \triangle B) = (A \triangle A) \triangle B = \emptyset \triangle B = B.$

60. Po prostych przekształceniach otrzymamy:
$A \triangle B \triangle (A \cap B) = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \triangle$
$\triangle (A \cap B) = \{[(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \setminus (A \cap B) \cup [(A \cap B) \setminus$
$\setminus [(A \cup B) \setminus (A \cap B)]\} = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) = A \cup B.$

61. Napiszmy
$A \triangle (A \cap B) = [A \setminus (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \setminus A] =$
$= A \setminus (A \cap B) = A \setminus B,$
co daje właśnie żądaną równość.

62. Wskazówka: Skorzystać z zad. 60.

63. Korzystamy z zad. 14, 47 oraz 49. Wtedy otrzymamy:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)' = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B'_n\right) =$$
$$= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B'_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B'_k\right)\right] \subset$$
$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B'_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n).$$

64. Ustalmy dowolnie liczby naturalne m, n i niech $m > n$. Wtedy $A_m \cap A_n = A_n$ oraz $A'_{n-1} \supset A'_n$. Stąd i z zad. 14 mamy:
$B_m \cap B_n = (A_m \setminus A_{m-1}) \cap (A_n \setminus A_{n-1}) = (A_m \cap A'_{m-1}) \cap$
$\cap (A_n \cap A'_{n-1}) = (A_m \cap A_n) \cap (A'_{m-1} \cap A'_{n-1}) = A_n \cap A'_{m-1} \subset$
$\subset A_n \cap A'_n = \emptyset$
Zatem zbiory ciągu $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są parami rozłączne.

a) Korzystając z tego, że ciąg $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest wstępujący oraz z prawa łączności dla dodawania zbiorów, otrzymujemy kolejno:
$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots \cup$
$\cup (A_n \setminus A_{n-1}) = [A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)] \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots \cup$
$\cup (A_n \setminus A_{n-1}) = [A_2 \cup (A_3 \setminus A_2)] \cup \ldots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) =$
$= \ldots = A_n,$

b) jest to konsekwencja równości z a.

65. Z naszych założeń wynika, że $B_k \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ oraz $A_k \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, dla $k = 1, 2, \ldots$ Stąd otrzymujemy:

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \left(A_1 \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap \left(A_2 \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap \ldots \subset$$
$$\subset (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \cap \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n).$$

Aby udowodnić inkluzję odwrotną załóżmy, że

$$x \notin \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Wtedy mamy:

$$\sim \left(x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \vee x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \Leftrightarrow \sim \left(x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \wedge \sim \left(x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \wedge x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n \Leftrightarrow \left(\bigvee_{k \in \mathbb{N}} x \in A'_k\right) \wedge \left(\bigvee_{m \in \mathbb{N}} x \in B'_m\right).$$

Weźmy $n = \max\{k, m\}$. Wtedy z faktu, że ciągi $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są zstępujące, wynika dalej:

$$\sim \left(x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \vee x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \Rightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x \in A'_n \wedge x \in B'_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x \in A'_n \cap B'_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A'_n \cap B'_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)' \Leftrightarrow x \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim \left(x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)\right).$$

W ten sposób kończymy dowód.

66. W s k a z ó w k a: Zastosować metodę analogiczną jak w rozwiązaniu zad. 65.

67. a) Korzystając z zależności ustalonych w zad. 14, 11 i 13, mamy:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \triangle \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} B'_i\right)\right] \cup \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cap\right.$$

$$\left.\cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} A'_i\right)\right] \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B'_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap A'_i)\right) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} [(A_i \cap B'_i) \cup (B_i \cap A'_i)] = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \triangle B_i).$$

Dowód zależności z punktu b pozostawiamy jako samodzielne ćwiczenie.

68. Z założenia wynika, że wszystkie składniki sumy po prawej stronie dowodzonej równości są podzbiorami zbioru A_0, więc (por. zad. 52)

$$(A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subset A_0.$$

Dowód inkluzji odwrotnej przeprowadzimy metodą niewprost. Przypuśćmy więc, że $x \in A_0$ oraz

$$x \notin \left[(A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right].$$

Stąd i z zad. 47 wynika, że:

$$x \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

oraz

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} x \notin A_i \setminus A_{i+1}.$$

Z pierwszej z powyższych zależności wynika, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $x \notin A_n$. Oznaczmy

$$n_0 = \min \{n: x \notin A_n\}.$$

Oczywiście (z założenia) $n_0 \geqslant 1$. Ponadto mamy, że $x \in A_{n_0 - 1}$ a zatem $x \in A_{n_0 - 1} \setminus A_{n_0}$. Daje to sprzeczność z drugą z powyższych zależności i kończy dowód.

69. Przekształćmy prawą stronę naszej równości, korzystając z zad. 68 oraz 47:

$$A_0 \setminus [(A_0 \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots] = \left[(A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \right.$$

$$\left. \cup \ldots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \right] \cap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1}) \right)'.$$

Dalej, korzystając z zad. 48 i 49, mamy:

$$A_0 \setminus [(A_0 \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots] = \left[(A_0 \setminus A_1) \cap \bigcap_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})'\right] \cup$$

$$\cup \left[(A_1 \setminus A_2) \cap \bigcap_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})'\right] \cup \left\{\left[\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right] \cap \bigcap_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})'\right\} =$$

$$= \left[\bigcap_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})' \cap (A_0 \setminus A_1)\right] \cup \left[\bigcap_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})' \cap (A_1 \setminus A_2)\right] \cup$$

$$\cup \ldots \cup \left\{\bigcap_{i=0}^{\infty} \left[(A_{2i} \setminus A_{2+1})' \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right]\right\}.$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})' \cap (A_{2k} \setminus A_{2k+1}) = \emptyset$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ oraz

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})' \cap (A_{2k-1} \setminus A_{2k}) = A_{2k-1} \setminus A_{2k},$$

dla $k = 1, 2, \ldots$, a ponadto

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \left[(A_{2i} \setminus A_{2i+1})' \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right] = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n,$$

więc dalej otrzymujemy

$$A_0 \setminus [(A_0 \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots] = (A_1 \setminus A_2) \cup$$
$$\cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

i koniec dowodu.

70. Stosując do prawej strony zależności z zad. 14, 47, 48 i 11, możemy napisać:

$$A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right)' = A_1 \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)' =$$
$$= A_1 \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} (A_1 \cap A_n')' = A_1 \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} (A_1' \cup A_n) = \bigcap_{n=2}^{\infty} [(A_1 \cap A_1') \cup$$
$$\cup (A_1 \cap A_n)] = \bigcap_{n=2}^{\infty} (A_1 \cap A_n) = A_1 \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

71. Ponieważ $A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subset A_n$, więc prawa strona naszego wyrażenia P zawiera się w lewej stronie L.

Aby udowodnić, że $L \subset P$ wystarczy pokazać, że $P' \subset L'$ (por. zad. 29). Załóżmy więc, że $x \in P'$. Wtedy otrzymujemy:

$$\sim (x \in P) \Leftrightarrow \sim \left\{x \in A_1 \vee x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} [A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup\right.$$
$$\left.\cup A_{n-1})]\right\} \Leftrightarrow \sim \left\{x \in A_1 \vee \bigvee_{n \geqslant 2} x \in [A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup\right.$$
$$\left.\cup A_{n-1})]\right\} \Leftrightarrow \sim \left\{x \in A_1 \vee \left[\bigvee_{n \geqslant 2} (x \in A_n) \wedge \sim (x \in A_1 \cup A_2 \cup\right.\right.$$
$$\left.\left.\cup \dots \cup A_{n-1})\right]\right\} \Leftrightarrow x \notin A_1 \wedge \bigwedge_{n \geqslant 2} [x \notin A_n) \vee (x \in A_1) \vee$$
$$\vee (x \in A_2) \vee \dots \vee (x \in A_{n-1})].$$

Z faktu, że ostatnie z powyższych zdań jest z założenia zdaniem prawdziwym wynika, że $x \notin A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co daje, że $x \notin L$. Żeby to pokazać przypuśćmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $x \in A_n$. Niech $k = \min\{n: x \in A_n\}$. Oczywiście $k \geqslant 2$, bo $x \notin A_1$.

Wtedy mamy, że

$$x \notin A_1 \wedge x \notin A_2 \wedge \dots \wedge x \notin A_{k-1} \wedge x \in A_k$$

jest zdaniem prawdziwym, wobec czego zdanie

$$\bigwedge_{n \geqslant 2} (x \notin A_n) \vee (x \in A_1) \vee \dots \vee (x \in A_{n-1})$$

jest zdaniem fałszywym, więc też

$$x \notin A_1 \wedge \bigwedge_{n \geqslant 2} [(x \notin A_n) \vee (x \in A_1) \vee \dots \vee (x \in A_{n-1})]$$

jest zdaniem fałszywym.

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

74. $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 1)$, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 1]$. Zatem ciąg ten nie jest zbieżny.

76. Mamy:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+1}\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+2}\right) \cup \ldots = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Dalej, ustalmy dowolnie liczbę naturalną m. Wtedy, jak łatwo zauważyć, dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+k} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+m},$$

stąd

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+k}\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+m}.$$

Stąd (ponieważ m było dowolnie ustalone)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+k}\right) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+m}\right),$$

co oznacza, że $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

Czytelnik sprawdzi, że $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

77. Ponieważ $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującym ciągiem zbiorów, więc dla każdego ustalonego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} A_{n+m} = A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots = A_n.$$

Stąd

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} A_{n+m}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Na podstawie zad. 76 wnioskujemy teraz, że ciąg $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny i jego granica wynosi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

78. Wystarczy pokazać (por. zad. 76), że

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zauważmy najpierw, że dla każdego ustalonego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n+m} = A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots = A_n,$$

ponieważ ciąg $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest z założenia zstępujący. Zatem

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n+m}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

i koniec dowodu.

79. a) i **b)**: Zauważmy, że korzystając z odpowiednich definicji, mamy:

$$x \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} x \in A_{n+k} \Leftrightarrow \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{m\geqslant n} x \in A_m.$$

Zatem

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{x\colon \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{m\geqslant n} x \in A_m\right\}.$$

Podobnie

$$x \in \liminf_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} A_{n+m} \Leftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} x \in A_{n+k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\geqslant n} x \in A_m,$$

a więc

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{x\colon \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\geqslant n} x \in A_m\right\}.$$

80. a) Korzystając z łatwej do udowodnienia zależności (pozostawiamy to Czytelnikowi)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cup Y_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

oraz z definicji granicy górnej ciągu zbiorów, otrzymujemy:

$$\limsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} (A_{n+m} \cup B_{n+m}) \right) =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n+m} \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} B_{n+m} \right).$$

Biorąc pod uwagę, że ciągi $\left\{ \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n+m} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\left\{ \bigcup_{m=0}^{\infty} B_{n+m} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ są zstępujące i korzystając z zad. 65, otrzymujemy dalej

$$\limsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n+m} \right\} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{m=0}^{\infty} B_{n+m} \right\} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n.$$

b) Wskazówka: Skorzystać z zależności

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n \cap Y_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$$

oraz z zad. 66.

82. a) Korzystając z zad. 47, mamy:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n' = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} A_{n+m}'\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n+m}\right)' = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n+m}\right)\right]' =$$
$$= (\limsup_{n\to\infty} A_n)'.$$

W podobny sposób dowodzimy równości z punktu b.

83. Załóżmy najpierw, że $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n \vartriangle A) = \emptyset$, co wobec zad. 76 oznacza, że $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \vartriangle A) = \emptyset$. Wtedy, zgodnie z zad. 79 wnioskujemy, że dowolny element x należy do $A_n \vartriangle A$ dla co najwyżej skończonej ilości n. Inaczej można powiedzieć, że dla każdego x istnieje takie n_0, że dla $n \geqslant n_0$ zachodzi

(∗) $x \in A_n \Leftrightarrow x \in A$.

Załóżmy teraz, że $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, tzn. $x \in A_n$ dla nieskończenie wielu n (por. zad. 79). Wtedy z (∗) wynika, że $x \in A$ i $x \in A_n$ dla wszystkich $n \geqslant n_0$. Stąd $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Zatem pokazaliśmy, że

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Stąd (zad. 76) mamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Na odwrót załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, a więc jest spełniona zależność

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Wtedy, jeśli $x \in A$, to $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$, a więc $x \in A_n$ począwszy od pewnego n_0. Jeżeli zaś $x \notin A$, to $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, a więc $x \notin A_n$ poczynając od pewnego n_1. Zatem jest spełniona zależność (∗) dla każdego x i $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n \vartriangle A) = 0$ i koniec dowodu.

Rozdział III

NIEKTÓRE WŁASNOŚCI ZBIORU LICZB RZECZYWISTYCH

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$.

2. Oznaczmy przez $\mathbb{Q}_+$ zbiór liczb wymiernych dodatnich. Ustawmy ten zbiór w ciąg w następujący sposób:

$\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, ...\right\}$. Oznacza to, że wypisujemy najpierw ułamki o sumie licznika i mianownika równej 2, później o sumie równej 3 itd.

Teraz ustawmy $\mathbb{Q}$ w ciąg podobnie jak zbiór $\mathbb{Z}$ (por. zad. 1). Zauważmy, że $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, a więc $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny.

3. Przypuśćmy, że przedział $(0, 1)$ jest przeliczalny. Zatem liczby z tego przedziału można ustawić w ciąg:

$(0, 1) = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$.

Wypiszmy jeszcze raz ten ciąg używając zapisu w postaci ułamków dziesiętnych:

$$a_1 = 0,\ c_1^1 c_2^1 c_3^1 c_4^1 ...,$$
$$a_2 = 0,\ c_1^2 c_2^2 c_3^2 c_4^2 ...,$$
$$a_3 = 0,\ c_1^3 c_2^3 c_3^3 c_4^3 ...,$$

....

Weźmy teraz liczbę $d = 0,\ d_1 d_2 d_3 ...,$ gdzie

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } c_i^i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}, \\ 5, & \text{gdy } c_i^i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \end{cases}$$

$(i = 1, 2, ...)$. Wtedy oczywiście $d \in (0, 1)$, ale $d \notin \{a_1, a_2, ...\}$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że przedział $(0, 1)$ jest nieprzeliczalny. Stąd wynika, że $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.

4. Pozostawiamy dowód Czytelnikowi; radzimy przeczytać uważnie rozwiązanie zad. 3.

5. Załóżmy, że A i B są przeliczalne. Wtedy $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Wystarczy więc napisać

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\}$$

i skorzystać z zasady indukcji matematycznej.

6. Wskazówka: Przypuśćmy, że zbiór liczb niewymiernych jest przeliczalny. Następnie skorzystajmy z wyników zawartych w zad. 2, 5 oraz 3.

7. Przypuśćmy, że nasza rodzina jest nieskończona. Wybierzmy po jednej liczbie wymiernej z każdego przedziału tej rodziny (por. zad. 35). Liczby te ustawmy w ciąg (oczywiście jego wyrazy nie powtarzają się). Koniec dowodu.

8. Udowodnimy zawarte w zadaniu twierdzenie dla dwóch zbiorów. (Czytelnik z łatwością przeniesie ten dowód na sytuację ogólną, korzystając z zasady indukcji).

Niech więc $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Wtedy $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3), \ldots\}$ (podobnie jak w zad. 2).

9. Pozostawiamy to Czytelnikowi (por. zad. 2 i zad. 8).

10. Udowodnimy np. punkty i oraz j, pozostawiając resztę Czytelnikowi.

Aby udowodnić i wystarczy zauważyć, że $xy \leqslant |x| \cdot |y|$ (punkt a), skąd $x^2 + y^2 + 2xy \leqslant x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2y^2}$ (punkt c). Tę ostatnią nierówność piszemy jako $(x+y)^2 \leqslant (|x|+|y|)^2$, skąd $\sqrt{(x+y)^2} \leqslant \sqrt{(|x|+|y|)^2}$ i mamy i. Teraz zauważmy, że korzystając z i mamy:

$$|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|,$$

a stąd

$$|x| - |y| \leqslant |x-y|.$$

Podobnie pokazujemy, że $-(|x|-|y|) \leqslant |x-y|$. Korzystając z punktu g otrzymujemy naszą nierówność.

11. Łatwy dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

12. Zauważmy, że z definicji mamy:

$$[x]^* - 1 \leqslant x \leqslant [x]^*,$$

skąd

$$-[x]^* \leqslant -x < 1 - [x]^*.$$

Ponieważ liczby $-[x]^*$ oraz $1-[x]^*$ są całkowite, z powyższej nierówności wnioskujemy, że

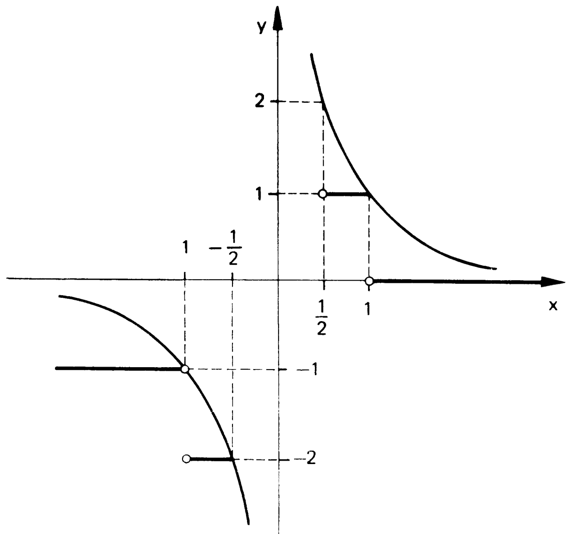
$$-[x]^* \leqslant [-x] < 1 - [x]^*,$$

a więc

$$[x]^* - 1 < -[-x] \leqslant [x]^*.$$

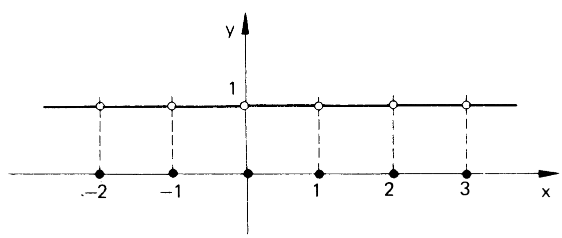
Ale liczby $[x]^*$ oraz $-[-x]$ są całkowite, a więc musi być $[x]^* = -[-x]$.

13. Czytelnik zechce sam sporządzić wykresy funkcji podanych w punktach a, b, c. Niżej podajemy wykresy z punktów d i e:
Wykres funkcji z punktu d (pogrubione linie poziome) jest przedstawiony na rys. 6.



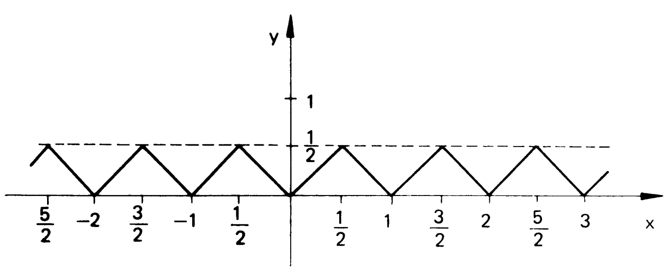
Rys. 6

Wykres funkcji z punktu e znajduje się na rys. 7



Rys. 7

14. Wykres funkcji $y=f(x)$ jest przedstawiony na rys. 8.



Rys. 8

15. Łatwe dowody pozostawiamy Czytelnikowi.

16. **a)** Niewymierna.

b) Wymierna. Rzeczywiście

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}-2\sqrt{6}=\frac{5+2\sqrt{6}}{1}-2\sqrt{6}=5.$$

c) Zauważmy, że

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}=$$
$$=\sqrt{2}+1+1-\sqrt{2}=2.$$

d) Wymierna. Oto dowód:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})^2}}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4.$$

17. Dowód polega na sprawdzeniu, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz dwóch ułamków daje się przedstawić w postaci ułamka.

18. Przypuśćmy, że $\sqrt{p}$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją $k, n \in \mathbb{N}$ takie, że $\sqrt{p}=\frac{k}{n}$. Stąd

$$pn^2=k^2.$$

Rozkładając lewą i prawą stronę powyższej równości na czynniki pierwsze widzimy, że po lewej stronie p występuje nieparzystą ilość razy, po prawej zaś stronie parzystą ilość razy. Sprzeczność.

19. Załóżmy, że $a\in\mathbb{Q}$ oraz $x\in\mathbb{Q}'$. Przypuśćmy, że $a+x\in\mathbb{Q}$. Wtedy $a+x=w$, $w\in\mathbb{Q}$. Stąd $x=w-a$. Ale $w-a\in\mathbb{Q}$ (zad. 17). Sprzeczność.

20. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi (por. rozwiązanie zad. 19).

21. Czytelnik sam przeprowadzi łatwy dowód.

22. Nie. Np., $\sqrt{2}+1$ oraz $-\sqrt{2}$ są liczbami niewymiernymi (zad. 18, 19 oraz 20) zaś $\sqrt{2}+1+(-\sqrt{2})=1$ jest liczbą wymierną.

23. Żeby pokazać, że $\sqrt{p\cdot q}$ jest liczbą niewymierną wystarczy naśladować rozumowanie w rozwiązaniu zad. 18. Aby udowodnić, że $\sqrt{p}-\sqrt{q}$ jest liczbą niewymierną przypuśćmy, że jest na odwrót. Wtedy $\sqrt{p}-\sqrt{q}=\frac{k}{n}$ dla pewnych

$k \in \mathbb{Z}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Teraz wystarczy obie strony podnieść do kwadratu i skorzystać z pierwszej części tego zadania.

24. Liczby w punktach a–f są niewymierne. Jest to konsekwencją faktów ustalonych w zad. 18, 19, 20, 21 oraz 23.

Liczba w g jest wymierna. Sprawdzić!

25. Rozwiązując nierówności charakteryzujące podane w zadaniu zbiory, otrzymujemy: $A = (-3, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (-10, 6)$, $D = (-1, 3) \setminus \{1\}$. Teraz odpowiedź jest już prosta.

26. $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

27. $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$.

28. Ponieważ $\log_{10} 10\sqrt[n]{10} = 1 + \frac{1}{n}$, więc $\sup A = \max A = 2$, $\inf A = 1$.

29. Mamy, że $A = \left\{\frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Stąd $\max A = \frac{1}{\pi}$, $\inf A = 0$.

30. $\inf A = 0,1$ zaś $\sup A = 0,1111... = \frac{1}{9}$.

31. $\sup A = \max A = 2$, $\inf A = 0$.

32. Zbiory A, B, C, D, E, F są ograniczone i np. $C = (1, 4)$, $F = (-3, 3) \setminus \{-1, 1\}$. Zbiory G i H są nieograniczone, ale H jest ograniczony z dołu oraz $\inf H = 0$.

33. $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$, $\sup A = 1$, $\inf B = 0$, $\sup B = 1$.

34. Dobierzmy liczbę $n \in \mathbb{N}$ tak, żeby $n > \frac{1}{b-a}$, czyli $\frac{1}{n} < b-a$. Następnie niech $k = [na]$. Stąd $k \leqslant na < k+1$ (zad. 11), a więc $\frac{k+1}{n} - a \leqslant \frac{1}{n} < b-a$, co kończy dowód.

35. W s k a z ó w k a: Przeprowadzić dowód nie wprost opierając się na twierdzeniu z poprzedniego zadania.

36. Niech $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Weźmy liczbę naturalną n taką, że $n > \frac{\sqrt{2}}{b-a}$. Wtedy $a < a + \frac{\sqrt{2}}{n} < b$, zaś z zad. 19 i 20 wynika, że liczba $a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ jest niewymierna.

37. Nie. Czytelnik zechce znaleźć przykład.

38. **a)** Gdyby $\log_2 3$ był liczbą wymierną, to dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodziłoby $\log_2 3 = \frac{m}{n}$. Równoważnie $2^m = 3^n$. Jest to jednak niemożliwe, bo liczba po lewej stronie jest parzysta, zaś po prawej nieparzysta. Stąd wynika, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

b), **c)** — liczby niewymierne. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

d) Pokażemy, że $\operatorname{tg} 15^\circ$ jest liczbą niewymierną. Rzeczywiście, gdyby $\operatorname{tg} 15^\circ \in \mathbb{Q}$, to liczba $\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$ też należałby do zbioru liczb wymiernych, co jest oczywiście sprzeczne.

e) $\operatorname{tg} 5^\circ$ jest liczbą niewymierną. Aby to udowodnić należy skorzystać z faktu ustalonego w d.

39. Przypuśćmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\sqrt{n(n+1)}$ jest wymierna. Istnieją wtedy $k, m \in \mathbb{N}$, względnie pierwsze i takie, że $n(n+1) = \frac{k^2}{m^2}$ lub równoważnie

$$k^2 = m^2 n(n+1).$$

Wtedy mamy dwie możliwości.

1) n jest liczbą parzystą.

Wtedy gdyby k było parzyste, to m musi być nieparzyste i po lewej stronie (w rozkładzie na czynniki pierwsze) liczba 2 występuje parzystą ilość razy, a po prawej nieparzystą. Gdyby k było liczbą nieparzystą, to m może być parzyste lub nie. Jednak wtedy prawa strona powyższej równości dzieli się przez 2, zaś lewa nie. Sprzeczność.

2) n jest liczbą nieparzystą.

Dowód w tym przypadku jest podobny.

Reasumując widzimy, że $\sqrt{n(n+1)}$ jest zawsze liczbą niewymierną.

40. Czytelnik sam przeprowadzi dowód. Radzimy oprzeć się na twierdzeniu z zad. 39.

41. Niech $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ będzie przeliczalną rodziną zbiorów przeliczalnych. Napiszmy:

$$\begin{array}{l}
A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots) \\
\qquad\quad \swarrow \ \swarrow \ \swarrow \\
A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots) \\
\qquad\quad \swarrow \ \swarrow \\
A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \ldots) \\
\qquad\quad \swarrow \\
A_4 = (a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Ustawmy teraz sumę $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ tzw. metodą przekątniową, zgodnie z kierunkiem strzałek, tzn.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, \ldots).$$

Koniec dowodu.

42. Niech $B_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ oznacza zbiór wszystkich ciągów i-wyrazowych o wyrazach ze zbioru A. Oczywiście

$$B_i = A \times A \times \ldots \times A = A^i.$$

Wtedy zbiór A^{∞} wszystkich ciągów skończonych o wyrazach ze zbioru A można przedstawić w postaci

$$A^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i.$$

Z twierdzenia zawartego w zad. 8 wynika, że A^i jest przeliczalny. Dalej, na podstawie zad. 41 wnioskujemy, że A^{∞} też jest przeliczalny.

43. Szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. Należy zastosować wyniki zawarte w zad. 2 oraz w zad. 42.

44. Dowód jest analogiczny jak w rozwiązaniu zad. 4.

45. Zbiór A jest nieograniczony, ponieważ zbiory $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ oraz $\left\{-\frac{3}{2}\pi - 2\pi n \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ są jego podzbiorami.

Natomiast B jest zbiorem ograniczonym, bowiem $-x \leqslant \sin x \leqslant x$ dla $x > 0$. Stąd mamy (pokazać to dokładnie), że $\sup B = 1$. Można również pokazać, że $\inf B = \frac{\sin x_0}{x_0}$, gdzie x_0 jest jedynym pierwiastkiem równania $x = \operatorname{tg} x$ w przedziale $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$. Czytelnik zechce użyć rachunku różniczkowego, żeby się o tym przekonać.

46. Ponieważ $(x-1)^2 \geqslant 0$ oraz $(x+1)^2 \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, więc $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Dla $x = 1$ mamy, że $\frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$, zaś dla $x = -1$ otrzymujemy, że $\frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}$. Zatem $\sup A = \max A = \frac{1}{2}$, $\inf A = \min A = -\frac{1}{2}$.

Jeżeli chodzi o zbiór B, to zauważmy, że $-1 < \frac{x}{1+|x|} < 1$. Czytelnik uzupełni dowód tego, że $\sup B = 1$, $\inf B = -1$.

47. Zauważmy najpierw, że

$$|a\sin x+b\cos x| = \sqrt{a^2+b^2}\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right| = \sqrt{a^2+b^2}\,|\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x| =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(x+\varphi)|,$$

gdzie φ jest takim kątem z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, że $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Stąd mamy

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a\sin x+b\cos x \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

Widać również, że dla pewnych x zachodzą równości po obydwu stronach. Zatem $\sup A = \max A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\inf A = \min A = -\sqrt{a^2+b^2}$.

48. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona mamy:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

Stąd widać, że nasz zbiór A pokrywa się ze zbiorem z następnego zadania (zad. 49).

Aby udowodnić ograniczoność zbioru B zauważmy, że

$$0 < 1-\frac{1}{n} < 1,$$

stąd

$$0 < \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Ograniczoność zbioru C wynika z nierówności

$$0 < 1+\frac{(-1)^n}{n} \leqslant 1+\frac{1}{n}$$

oraz z ograniczoności zbioru A (por. zad. 49).

49. Wykorzystując nierówność ze wskazówki (udowodnić ją!) mamy:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},\ \text{dla } k = 1,2,\ldots,$$

skąd

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots = 3.$$

Zatem A jest ograniczony z góry przez liczbę 3. Ograniczoność z dołu jest trywialna, np. przez 1.

50. Oznaczmy przez x_n liczbę $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}$. Zauważmy, że $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ Zatem, korzystając z naszej wskazówki weźmy $n > 10$. Wtedy mamy:

$$x_n \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{10}{2^{10}}\right)+\left(\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{10}{2^{10}}\right)+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{10}{2^{10}}\right)+2-\frac{1}{n} < \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{10}{2^{10}}\right)+2.$$

Otrzymana liczba jest ograniczeniem górnym zbioru A. Ograniczeniem dolnym i zarazem minimum zbioru A jest $\frac{1}{2}$.

51. Czytelnik udowodni, że $\min A_k = \frac{k}{2+k}$ oraz $\sup A_k = k$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Stąd $\min \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{1}{3}$, zaś zbiór ten jest nieograniczony z góry.

52. Wykażemy pierwszą część zadania pozostawiając dowód drugiej części Czytelnikowi.

Oznaczmy $\bar{a} = \sup A$, $\bar{b} = \sup B$. Wtedy dla dowolnego $x \in A+B$ istnieją $a \in B$ oraz $b \in B$ takie, że $x = a+b$. Ale $a+b \leqslant \bar{a}+\bar{b}$, skąd $x \leqslant \bar{a}+\bar{b}$. Zatem $\bar{a}+\bar{b}$ jest majorantą zbioru $A+B$.

Ustalmy teraz dowolne $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $a_1 \in A$ oraz $b_1 \in B$ takie, że $\bar{a}-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_1$ i $\bar{b}-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant b_1$. Stąd mamy

$$\bar{a}+\bar{b}-\varepsilon \leqslant a_1+b_1.$$

Ale $a_1+b_1 \in A+B$. Tym samym kończymy dowód.

53. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

54. Oznaczmy $m = \inf B$, $M = \sup B$. Mamy dwie możliwości:

1° $|m| \leqslant |M|$,

2° $|m| > |M|$.

Udowodnimy dla przykładu przypadek 1°. Zauważmy, że nierówność $|m| \leqslant |M|$ implikuje, że $M \geqslant 0$ oraz $m \geqslant -M$. Stąd, dla dowolnego $x \in B$ mamy $-M \leqslant m \leqslant x \leqslant M$, skąd $|x| \leqslant M$. Zatem M jest majorantą zbioru C.

Dalej, dla ustalonego $\varepsilon > 0$ znajdźmy $x \in B$ takie, że $M-\varepsilon \leqslant x$. Oczywiście, gdyby $M = 0$ to $B = \{0\}$ (dlaczego?). Gdy zaś $M > 0$, to możemy przyjąć, że $x \geqslant 0$. Wtedy $M-\varepsilon \leqslant |x|$. Ale $|x| \in C$, więc pokazaliśmy, że $\sup C = M = |M|$.

55. Pozostawiamy Czytelnikowi dowód (por. rozwiązanie zad. 52).

56. Nietrudno przekonać się o tym, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ jej klasa abstrakcji $[x]_S$ ma postać:

$$[x]_S = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ x+\mathbb{Q}, & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

gdzie symbol $x+\mathbb{Q}$ rozumiemy jako zbiór $\{x+q\colon q \in \mathbb{Q}\}$. Z przeliczalności zbioru $\mathbb{Q}$ (por. zad. 2) wynika przeliczalność każdej klasy abstrakcji $[x]_S$.

Gdyby rodzina $\mathbb{R}/S$ wszystkich klas abstrakcji była przeliczalna, to z zad. 41 wynikałoby, że $\mathbb{R}$ jest zbiorem przeliczalnym. Sprzeczność (por. zad. 3).

57. Mamy:

$$\left|\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2}\right| = \frac{|a(1+b^2)-b(1+a^2)|}{(1+a^2)(1+b^2)} =$$

$$= \frac{|(a-b)-(a-b)ab|}{(1+a^2)(1+b^2)} = |a-b|\frac{|1-ab|}{1+a^2+b^2+a^2b^2} \leqslant$$

$$\leqslant |a-b|\frac{|1-ab|}{1+a^2+b^2}.$$

Wystarczy więc pokazać, że $|1-ab| \leqslant 1+a^2+b^2$. Ale $|1-ab| \leqslant 1+|ab|$, zatem wystarczy pokazać, że $1+|ab| \leqslant 1+a^2+b^2$ lub równoważnie

$$|ab| \leqslant a^2+b^2.$$

Dla dowodu tej ostatniej nierówności, zauważmy że $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$, skąd $a^2+b^2 \geqslant 2|ab| \geqslant |ab|$. Koniec dowodu.

58. Weźmy wielomian $W(x) = (a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\ldots+(a_nx+b_n)^2$. Oczywiście $W(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Z drugiej strony $W(x) = (a_1^2+\ldots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+\ldots+b_n^2)$. Ponieważ $W(x)$ jest trójmianem kwadratowym przyjmującym wartości nieujemne, więc jego wyróżnik Δ przyjmuje wartości niedodatnie. Ale

$$\Delta = 4(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 - \\ -4(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2),$$

zatem

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

Nierówność z naszego zadania jest równoważna powyższej.

59. Z założenia wynika, że $b_ib_j > 0$ $(i,j = 1,\ldots,n)$, zatem

$$(*)\quad \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2} = \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2+2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}} b_ib_j} <$$

$$< \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

Następnie skorzystajmy z nierówności Schwarza (por. zad. 58) zapisanej w postaci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Przyjmijmy w tej nierówności

$$x_i = \frac{a_i}{b_i},\ y_i = b_i\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wtedy otrzymamy:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Stąd i z nierówności (*) otrzymamy:

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\right)^2 < \frac{a_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2}{b_2^2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n^2}.$$

60. Załóżmy najpierw, że dane są liczby dodatnie a, b. Wychodząc z nierówności $(a-b)^2 \geqslant 0$, otrzymujemy kolejno:

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$
$$a^2+b^2+ab \geqslant 3ab,$$
$$\frac{ab}{a^2+b^2+ab} \leqslant \frac{1}{3},$$
$$\frac{-2ab}{a^2+b^2+ab} \geqslant -\frac{2}{3},$$
$$1-\frac{2ab}{a^2+ab+b^2} \geqslant \frac{1}{3},$$
$$\frac{a^2+b^2-ab}{a^2+b^2+ab} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Mnożąc obie strony ostatniej nierówności przez $a+b$, otrzymujemy

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2+ab} \geqslant \frac{a+b}{3}.$$

Stąd

$$a^3+b^3 \geqslant \frac{1}{3}(a+b)(a^2+b^2+ab).$$

Z drugiej strony

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab).$$

Dodając ostatnią równość stronami do poprzedniej nierówności, otrzymamy

$$2a^3 \geqslant (a^2+b^2+ab)\left[\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}b\right],$$

skąd

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geqslant \frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b.$$

Podstawiając w ostatniej nierówności kolejno $a = x_1$, $b = x_2$, później $a = x_2$, $b = x_3, \ldots, a = x_{n-1}, b = x_n$ i w końcu $a = x_n, b = x_1$ i dodając otrzymane nierówności stronami otrzymamy żądaną nierówność.

61. Zauważmy, że korzystając z własności wartości bezwzględnej (zad. 10) mamy:

$$|x| = |x+x_1+\ldots+x_n-(x_1+x_2+\ldots+x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |x+x_1+\ldots+x_n|+|x_1+x_2+\ldots+x_n|.$$

Stąd

$$|x+x_1+\ldots+x_n| \geqslant |x|-|x_1+x_2+\ldots+x_n| \geqslant |x|-$$
$$-(|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|).$$

62. Mamy:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

63. Wskazówka: Rozpatrzyć przypadki:

$1°$ $[a] \leqslant a < [a]+\frac{1}{2}$,

$2°$ $[a]+\frac{1}{2} \leqslant a < [a]+1$.

64. Z nierówności Bernoulliego otrzymujemy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2,$$

skąd

$$\sqrt[n]{2} \leqslant 1+\frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{2}-1 \leqslant \frac{1}{n}.$$

Z drugiej strony, ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = 1+n\frac{1}{2n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{(2n)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^n} <$$
$$< 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots = 2.$$

Zatem $\sqrt[n]{2} \geqslant 1+\frac{1}{2n}$ i dalej

$$\sqrt[n]{2}-1 \geqslant \frac{1}{2n}.$$

65. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in (0,1)$. Rozpatrujemy dwa przypadki:

1° $\frac{n}{n+1} \leqslant x < 1.$

Wtedy przyjmujemy $k = n$. Mamy:

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}\cdot n \leqslant nx = kx = nx < n\cdot 1 = n.$$

2° $0 < x < \frac{n}{n+1}.$

Wtedy, niech $k = \left[\frac{n^2}{(n+1)x}\right]^*$ (zob. zad. 12). Mamy:

$$\frac{n^2}{(n+1)x} \leqslant k < \frac{n^2}{(n+1)x}+1.$$

Stąd, mnożąc wszystkie strony przez x otrzymujemy

$$\frac{n^2}{n+1} \leqslant kx < \frac{n^2}{n+1}+x < \frac{n^2}{n+1}+\frac{n}{n+1} = n.$$

66. Weźmy $x \in (0,2)$. Rozważmy dwa przypadki.

1° x jest liczbą niewymierną. Wtedy $\frac{x}{2}$ też jest liczbą niewymierną (zad. 20) oraz $\frac{x}{2} \in (0,1)$. Zatem $x = \frac{x}{2}+\frac{x}{2} \in A+A$.

2° x jest liczbą wymierną, $x = \frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$. Weźmy liczbę niewymierną $y, y \in (0,1)$ i tak małą, żeby $y < \frac{1}{2}\frac{m}{n} < 1$ oraz $y+\frac{1}{2}\frac{m}{n} < 1$ (por. zad. 36). Wtedy biorąc $u = y+\frac{1}{2}\frac{m}{n}$ oraz $v = \frac{1}{2}\frac{m}{n}-y$ mamy, że u i v są niewymierne (zad. 19) oraz $u, v \in (0,1)$. Zatem $u+v \in A+A$. Z drugiej strony $u+v = x \in A+A$.

Ostatecznie z 1° i 2° wynika, że $(0,2) \subset A+A$. Inkluzja odwrotna jest oczywista.

67. Weźmy ciąg $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{1000}\}$, gdzie $a_k = kx-[kx]$, $k = 0,1,2,\ldots,$ 1000. Dalej, niech L_k oznacza przedział $\left[\frac{k}{1000}, \frac{k+1}{1000}\right]$, $k = 0,1,2,\ldots,999$. Ponieważ $a_k \in [0,1)$, więc pewne dwie spośród liczb $a_0, a_1, \ldots, a_{1000}$ muszą znaleźć się w tym samym przedziale L_k, a więc dla pewnych $p, q, p > q$, jest $|a_p - a_q| < \frac{1}{1000}$.

Oznaczmy teraz: $P = [px]$, $Q = [qx]$. Mamy

$$|(p-q)\,x-(P-Q) = |a_p-a_q| < \frac{1}{1000},$$

skąd

$$\left|\frac{P-Q}{p-q}-x\right| < \frac{1}{1000\,(p-q)}.$$

Zatem szukanym ułamkiem jest $\frac{P-Q}{p-q}$.

68. Pokażemy najpierw, że przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1}-\sqrt{m}$. Wtedy wystarczy skorzystać z zad. 40.

Dla liczby postaci $a+b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ wprowadźmy tzw. operację sprzężenia określając, że $\overline{a+b\sqrt{2}} = a-b\sqrt{2}$. Łatwo sprawdzić, że sprzężenie sumy (iloczynu) jest sumą (iloczynem) sprzężeń. Zatem jeżeli $(1+\sqrt{2})^n = A+B\sqrt{2}$, to $(1-\sqrt{2})^n = A-B\sqrt{2}$. Stąd mamy: $(-1)^n = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = A^2-2B^2$, czyli $A = \sqrt{2B^2+(-1)^n}$. Ostatecznie

$$(1-\sqrt{2})^n = \sqrt{2B^2+(-1)^n}-\sqrt{2B^2}.$$

A więc za m przyjmiemy $2B^2$, gdy n jest parzyste lub $2B^2-1$, gdy n jest nieparzyste.

69. Wychodząc od równości (sprawdzić!)

$$(\sqrt{5}+1)^3 = 8(\sqrt{5}+2),$$
$$(\sqrt{5}-1)^3 = 8(\sqrt{5}-2),$$

otrzymujemy

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{5}+1)^3}{8}}-\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{5}-1)^3}{8}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1.$$

Zatem rozpatrywana liczba jest oczywiście wymierna.

70. Jeżeli $q = 1$, to:

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| \geqslant \sqrt{2}-1 > \frac{1}{3}.$$

Weźmy teraz $q \geqslant 2$. Mamy:

$$\left(\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{p}{q}\right) = \frac{2q^2-p^2}{q^2}.$$

Ponieważ $2q^2-p^2$ nie może być zerem, więc

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|\cdot\left|\sqrt{2}+\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^2}.$$

Jeśli więc $\left|\sqrt{2}+\frac{p}{q}\right| \leqslant 3$, to $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2}$. Jeśli zaś $\left|\sqrt{2}+\frac{p}{q}\right| > 3$, to $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{12} \geqslant \frac{1}{3q^2}$.

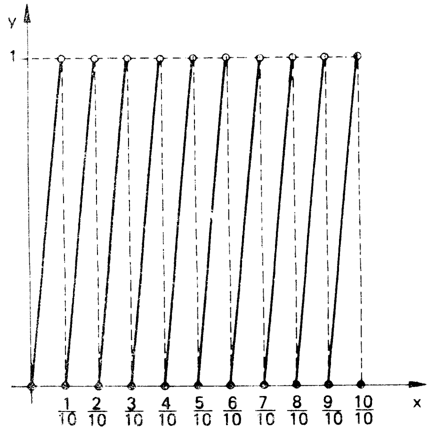
71. Zgodnie ze wskazówką funkcję $f(x)$ możemy przedstawić następująco

$$f(x) = 10x-[10x].$$

Zauważmy, że oznaczając przez $g(x)$ funkcję z zad. 13c, tzn. $g(x) = x-[x]$ widzimy, że

$$f(x) = g(10x).$$

Zatem wykres funkcji f otrzymamy „zagęszczając" dziesięciokrotnie wykres funkcji g (por. zad. 56 z rozdz. IV). Niżej podajemy ten wykres (rys. 9).



Rys. 9

72. Czytelnik bez trudu przeprowadzi dowód opierając się na zad. 43.

73. Korzystając z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną (zad. 54, rozdz. I) mamy:

$$\sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{m\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1} \leqslant \frac{m+n-1}{n},$$

$$\sqrt[m]{n} = \sqrt[m]{n\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1} \leqslant \frac{n+m-1}{m}.$$

Zatem:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}} \geqslant \frac{n}{m+n-1}+\frac{m}{m+n-1} > 1.$$

Ponadto biorąc $m = 1$, łatwo przekonać się, że kres dolny rozważanego zbioru jest równy 1.

74. W s k a z ó w k a: Skorzystać z nierówności

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2}}} = 2.$$

75. Udowodnimy np. twierdzenie zawarte w punkcie a. Jest oczywiste, że $\inf A = \min A = a_1$. Z drugiej strony, ponieważ A jest ograniczony z góry, więc istnieje $a = \sup A$. Wtedy dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a-\varepsilon < a_{n_0}$. Biorąc teraz dowolne $n \geqslant n_0$ i korzystając z założenia otrzymujemy:

$$a-\varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a < a+\varepsilon.$$

Stąd wynika, że $|a_n - a| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i koniec dowodu.

76. Ustalmy dowolnie $m \in \mathbb{N}$ i rozważmy zbiór

$$A_m = \left\{\frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Oznaczmy $x_n^m = \dfrac{(n+m)^2}{2^{nm}}$, $n = 1, 2, \ldots$ Oczywiście $x_n^m > 0$. Z drugiej strony mamy:

$$\frac{x_{n+1}^m}{x_n^m} = \frac{(n+1+m)^2}{2^{nm+m}} \cdot \frac{2^{nm}}{(n+m)^2} = \frac{1}{2^m} \cdot \left(\frac{n+m+1}{n+m}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2^m} \cdot \left(1+\frac{1}{n+m}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2^m} \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{9}{4} < 1$$

dla $m \geqslant 2$. Zatem ciąg $\{x_n^m\}$ jest malejący dla każdego ustalonego $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. W przypadku, gdy $m = 1$ ciąg $\{x_n^1\}$ jest malejący po odrzuceniu pierwszego wyrazu. Stąd, poprzez twierdzenie z zad. 75 otrzymujemy, że

$$\sup A_m = x_1^m = \frac{(1+m)^2}{2^m},$$

$$\inf A_m = \lim_{n\to\infty} x_n^m = 0$$

(por. zad. 16, rozdz. VI), dla $m \geqslant 2$. Podobnie

$$\sup A_1 = \frac{9}{4}, \ \inf A_1 = 0.$$

Ostatecznie

$$\inf A = 0, \ \sup A = \frac{9}{4}.$$

77. Rozwiązanie tego zadania pozostawiamy Czytelnikowi.

78. Zauważmy, że

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3+3\sum\limits_{k=1}^{n} k^2+2\sum\limits_{k=1}^{n} k}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}.$$

Korzystając teraz ze wzorów ustalonych w zad. 1, 2 oraz 3, rozdz. I, widzimy, że

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3} = 1+3\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}+$$

$$+2\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = 1+2\frac{2n+1}{n^2+n}+4\frac{1}{n^2+n}.$$

Ponieważ ciągi $\left\{\frac{2n+1}{n^2+n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^2+n}\right\}$ są malejące i ograniczone z dołu, więc z zad. 75 mamy:

$$\sup A = 1+3+2 = 6, \ \inf A = 1.$$

79. Rozważmy liczby 0, $x-[x]$, $2x-[2x]$, ..., $nx-[nx]$. Oczywiście liczby te należą do przedziału $[0, 1]$. Dwie spośród nich różnią się nie więcej niż o $\frac{1}{n}$. Stąd istnieją takie liczby całkowite r_1, r_2, s_1, s_2, że $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant n$ oraz $|(r_1x-s_1)-(r_2x-s_2)| \leqslant \frac{1}{n}$. Przyjmując $q = r_1-r_2$, $p = s_1-s_2$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

80. Zauważmy, że
$1 = (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) = a^3+b^3+3ab$. Stąd i z założenia otrzymujemy, że $ab \in \mathbb{Q}$. Dalej mamy

$$1 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab.$$

Stąd i z wyżej udowodnionego faktu otrzymujemy, że $a^2+b^2 = 1-2ab \in \mathbb{Q}$. Z drugiej strony

$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2},$$

co pozwala wywnioskować, że $a-b \in \mathbb{Q}$. Ale $a+b+a-b = 2a \in \mathbb{Q}$, więc $a \in \mathbb{Q}$. Oczywiście $b \in \mathbb{Q}$, bo $b = 1-a$.

81. Udowodnimy najpierw pewien fakt pomocniczy. Załóżmy, że α, β są liczbami niewymiernymi dodatnimi takimi, że $\alpha+\beta = 1$. Ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{N}$. Niech $k = [n\alpha]$, $k \in \mathbb{Z}$. Wtedy $k < n\alpha < k+1$ (równość $n\alpha = k$ nie jest możliwa, bo α jest niewymierna). Po prostych przekształceniach otrzymujemy stąd, że

$$n-k-1 < n-n\alpha < n-k. \tag{1}$$

Dalej zauważmy, że $\beta = 1-\alpha$, co implikuje $n\beta = n-n\alpha$ i w połączeniu z (1) pozwala otrzymać

$$[n\beta] = n-k-1.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$[n\alpha]+[n\beta] = n-1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Załóżmy teraz, że a, b, c, d są liczbami z naszego zadania. Wtedy na podstawie (2) otrzymujemy

$$[na]+[nb] = n-1 = [nc]+[nd], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Na odwrót załóżmy, że zachodzi równość podana w zadaniu. Ponieważ $a+b = 1$, więc na podstawie (2) otrzymujemy

$$[nc]+[nd] = n-1, \quad n = \mathbb{N}. \tag{3}$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy $k = [nc]$. Wtedy z (3) mamy, że $[nd] = n-k-1$. Na podstawie definicji części całkowitej liczby i z założenia otrzymamy dalej

$$k < nc < k+1,$$

$$n-k-1 < nd < n-k.$$

Po dodaniu tych nierówności stronami otrzymujemy

$$n-1 < nc+nd < n+1,$$

skąd

$$\frac{n-1}{n} < c+d < \frac{n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wobec dowolności liczby n powyższa nierówność implikuje, że $c+d = 1$.

82. Ustawmy zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ w ciąg $\{q_1, q_2, \ldots\}$ o niepowtarzających się wyrazach (por. zad. 2). Dla dowolnej liczby rzeczywistej x określmy zbiór $K_x = \{n \in \mathbb{N} : q_n \leqslant x\}$. Oczywiście $K_x \neq \emptyset$ oraz $K_x \neq K_y$ dla $x \neq y$ (por. zad. 34). Ponadto, jeżeli $x < y$, to $K_x \subset K_y$. Zatem $\{K_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ jest łańcuchem. Jest to łańcuch nieprzeliczalny, zbiór $\mathbb{R}$ bowiem jest nieprzeliczalny (zad. 3).

ROZDZIAŁ IV

ODWZOROWANIA I ICH WŁASNOŚCI

1. f jest bijekcją. Ponadto

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-2x}{x-2} & \text{dla} \quad x \neq 2 \\ -2 & \text{dla} \quad x = 2. \end{cases}$$

Wskazówka: Można posłużyć się wykresem funkcji homograficznej $f(x) = \frac{2x+1}{x+2} = 2 - \frac{3}{x+2}$.

2. f jest bijekcją. Czytelnik sprawdzi to i wyznaczy f^{-1}.

3. f jest injekcją. Rzeczywiście, weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$. Stąd $(x_1+2, 2x_1+1) = (x_2+2, 2x_2+1)$. Porównując np. pierwsze elementy tych par otrzymujemy, że $x_1 = x_2$.

f nie jest surjekcją, bo np. nie istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = (0, 0)$. Sprawdzić!

4. f nie jest różnowartościowa, bo np. $f(1, 0) = (1, 0)$ i $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = (1, 0)$.
Funkcja f nie jest również surjekcją, bo np. nie istnieje $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takie, że $f(x, y) = (0, 1)$. Rzeczywiście, w przeciwnym razie byłoby $x + 2y = 0$, $xy = 1$, skąd $-2y^2 = 1$ i sprzeczność.

5. f jest bijekcją oraz $f^{-1}(x, y) = \left(y, \frac{x-y}{2}\right)$.

6. f jest bijekcją i jest odwrotna do samej siebie.
Wskazówka: Skorzystać ze wzoru $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$.

7. f jest bijekcją (sporządzić wykres!).

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{dla} \quad x < 0 \\ x & \text{dla} \quad x \in [0, 1) \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{dla} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

8. Czytelnik sprawdzi, że f jest nieparzysta. Dalej, weźmy $x_1, x_2 > 0$, $x_1 < x_2$. Mamy:

$$f(x_2)-f(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - x_1 - \frac{1}{x_1} = (x_2 - x_1) - \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} = (x_2 - x_1)\frac{x_2 \cdot x_1 - 1}{x_2 \cdot x_1}.$$

Ponieważ $x_2 - x_1 > 0$, więc otrzymujemy stąd, że $f(x_2)-f(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_2 x_1 - 1 > 0$, a to jest spełnione gdy $x_1 \geqslant 1$. Zatem na przedziale $[1, \infty)$ f jest ściśle rosnąca. Podobnie pokazujemy, że na przedziale $(0, 1]$ f jest ściśle malejąca.

9. g jest różnowartościowa oraz $g(\mathbb{R}) = (-\infty, 2) \cup \{3\} \cup (4, \infty)$. Stąd

$$g^{-1}: (-\infty, 2) \cup \{3\} \cup (4, \infty) \to \mathbb{R}$$

oraz

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dla} \quad x < 2 \\ 1 & \text{dla} \quad x = 3 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 4. \end{cases}$$

Ponadto $\sup\limits_{x \in [-5, 1]} g(x) = 3$.

10. $(g \circ f)(x, y) = \dfrac{2x - y}{1 + (2x-y)^2}$.

11. $(g \circ f)(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+2x+2} & \text{dla} \quad x < 1 \\ \dfrac{x^2+x}{x^4+2x^2+x+1} & \text{dla} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$

12. $(g \circ f)(x) = (xy + x^2, \sin(xy + x^2))$ oraz $(f \circ g)(x) = x \sin x + x^2$.

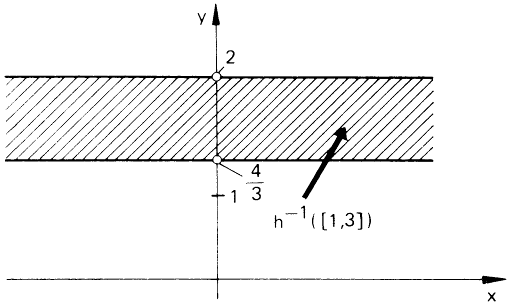
13 i 14. Rozwiązanie tych zadań pozostawiamy Czytelnikowi.

15. Załóżmy, że funkcje $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ są różnowartościowe. Weźmy $x_1, x_2 \in X$. Wtedy, jeżeli $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, to $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Z różnowartościowości g wynika, że $f(x_1) = f(x_2)$. Różnowartościowość f pozwala wywnioskować, że $x_1 = x_2$ i koniec dowodu.

16. Bez trudu znajdujemy, że $h(x, y) = (g \circ f)(x, y) = 3y - 3$.
Dalej mamy

$$h^{-1}([1, 3]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) \in [1, 3]\} =$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y - 3 \in [1, 3]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{4}{3} \leqslant y \leqslant 2\}.$$

Niżej podany rysunek ilustruje ten zbiór.



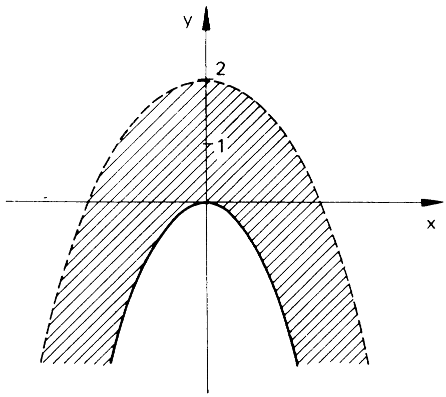
Rys. 10

17. Rozwiązanie pozostawiamy Czytelnikowi.

18. $f(A) = \{x^2+y+1 : 0 \leqslant x < 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\} = [1, 3)$.
Z drugiej strony

$$f^{-1}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2+y+1 < 3\} = \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 \leqslant y < -x^2+2\}.$$

Zbiór $f^{-1}(B)$ jest zaznaczony na niżej podanym rysunku (rys. 11). Jest to zakreskowana część płaszczyzny bez paraboli $y = -x^2+2$.



Rys. 11

19. f nie jest różnowartościowa, bo np. $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$. Ponadto, $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

20. $f(A) = [-1, 0] \cup (1, 2) \cup \{5\}$.

21. $g(A) = \left(\frac{3}{2}, 2\right]$, $g^{-1}(B) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

22. f nie jest injekcją i nie jest surjekcją (por. rozwiązanie zad. 4). Ponadto $f^{-1}(\{(1, 0)\}) = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

23. $f^{-1}(\{(0,2)\}) = \{(1,1),(-1,-1)\}$, a więc f nie jest injekcją. Łatwo też pokazać, że nie jest surjekcją (dlaczego?).

24. $f^{-1}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)\in B\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\in(1,2]\} =$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 < x-y \leqslant 2\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2 \leqslant y < x-1\}$.

Zatem, $f^{-1}(B)$ jest zbiorem punktów na płaszczyźnie zawartych między prostymi $y = x-2$ oraz $y = x-1$, wliczając w to pierwszą prostą, ale bez drugiej.

25. $\sup\limits_{x\in A} f(x) = 3, \quad \inf\limits_{x\in B} f(x) = \frac{6}{5}$.

26. Jest to proste zadanie z trygonometrii, którego rozwiązanie pozostawiamy Czytelnikowi.

27. $f(A) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

28. Mamy: $(f\circ g)(x) = 2^{\sin x}$. Stąd $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}(f\circ g)(x) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} 2^{\sin x} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

29. Pozostawiamy Czytelnikowi bardzo łatwy dowód.

30. Okres podstawowy wynosi 1 (por. zad. 13, rozdz. III).

31. f nie jest parzysta ani nieparzysta. Funkcja $g(x)$ jest parzysta, bo: $g(-x) = -x\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1} = -x\frac{1+2^x}{1-2^x}$ (mnożymy licznik i mianownik ułamka przez 2^x). Stąd mamy:

$$g(-x) = x\frac{1+2^x}{-1+2^x} = g(x).$$

Natomiast funkcja h jest nieparzysta (udowodnić!).

32. Teza wynika stąd, że każda liczba wymierna jest okresem funkcji f (por. zad. 17 i zad. 19, rozdz. III).

33. Weźmy dowolne $y\in f(D)$. Wtedy istnieje dokładnie jedno $x\in D$ takie, że $f(x) = y$. Ale $f(-x) = -f(x) = -y$, skąd $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$.

34. Pozostawiamy Czytelnikowi trywialne dowody.

35. Przytoczymy dowód pierwszej nierówności.

Oznaczmy $m = \sup\limits_{x\in B} f(x)$. Wtedy $f(x) \leqslant m$ dla każdego $x\in B$, a ponieważ $A\subset B$ więc także $f(x) \leqslant m$ dla każdego $x\in A$. Stąd $\sup\limits_{x\in A} f(x) \leqslant m$.

36. $f(A) = [0, 1)$.

37. $f^{-1}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)\in B\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy = 1, 0 \leqslant x+y \leqslant 1\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \frac{x^2+1}{x} \leqslant 1\}$. Stąd wynika, że $x > 0$. Wystarczy więc rozwiązać nierówność $\frac{x^2+1}{x} \leqslant 1$ lub równoważnie $x^2-x+1 \leqslant 0$. Jej rozwiązaniem jest zbiór pusty, zatem $f^{-1}(B) = \emptyset$.

38. $f^{-1}(B) = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : f(x, y)\in B\} = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : y^2 = 1,\ x^2-2x-y > 2\} = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-2x-1 > 2\} \cup \{(x, -1)\in\mathbb{R}^2 : x^2-2x+1 > 2\} = [(-\infty, -1)\cup(3, \infty)]\times\{1\} \cup [(-\infty, 1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2}, \infty)]\times\{-1\}$.

Pozostawiamy Czytelnikowi szkic tego zbioru.

39. Zauważmy, że $h(x, y) = |x+y|$. Stąd $h^{-1}((0, 1]) = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < |x+y| \leqslant 1\} = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : -x-1 \leqslant y \leqslant -x+1\} \setminus \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : y = -x\}$.

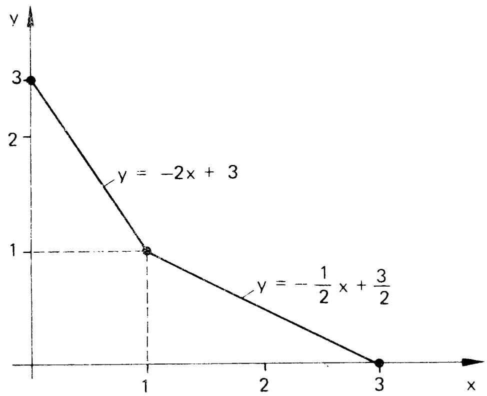
Pozostawiamy Czytelnikowi naszkicowanie tego zbioru.

40. Mamy:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x) & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ g(2x+3) & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ -(2x+3)-2 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ -2x-5 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

41. Naszkicujmy najpierw wykres funkcji $y = g(x)$:



Rys. 12

Dalej, korzystając z tego wykresu mamy:

$$h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x)+1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant g(x) \leqslant 1 \\ -g(x)+3 & \text{dla} \quad 1 < g(x) \leqslant 3 \end{cases} =$$

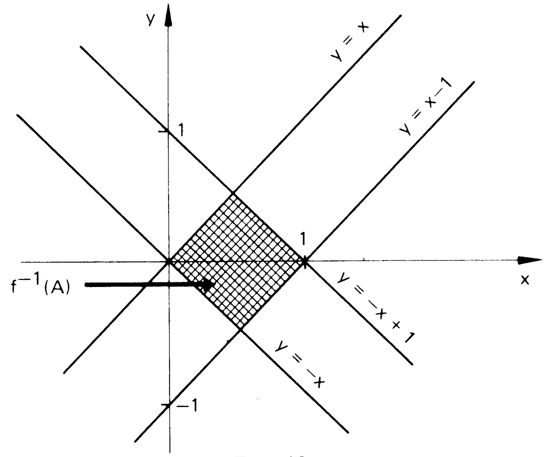
$$= \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)+1 & \text{dla} \quad x\in[1, 3] \\ -(-2x+3)+3 & \text{dla} \quad x\in[0, 1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x & \text{dla} \quad x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & \text{dla} \quad x \in [1, 3]. \end{cases}$$

Teraz, rysując wykres funkcji h znajdziemy łatwo, że $h^{-1}\left(\left(0, \frac{3}{2}\right]\right) = \left(0, \frac{3}{4}\right] \cup$ $\cup [2, 3]$.

42. Rozwiązanie pozostawiamy Czytelnikowi (por. rozwiązanie zad. 41).

43. Poprzestaniemy na podaniu ilustracji graficznej zbioru $f^{-1}(A)$.



Rys. 13

44. Czytelnik zechce rozwiązać to zadanie samodzielnie.

45. Zauważmy, że f jest nieparzysta. Zatem wystarczy pokazać, że f jest rosnąca na przedziale $[0, \infty)$. W tym celu weźmy x_1, x_2 takie, że $0 \leqslant x_1 < x_2$. Mamy:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2} - \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2 - x_1}{(1+x_2)(1+x_1)} > 0,$$

co pokazuje, że f jest rosnąca na $[0, \infty)$, a w konsekwencji na zbiorze $\mathbb{R}$.

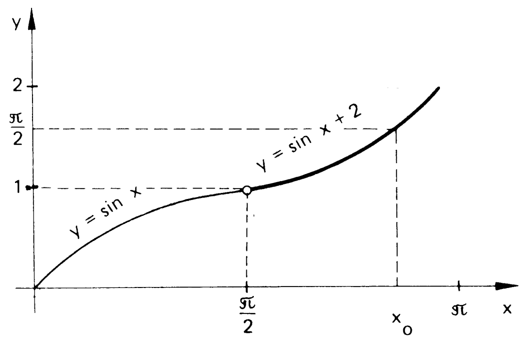
Podobnie, dla wyznaczenia $f(\mathbb{R})$ wystarczy wyznaczyć $f([0, \infty))$. Mamy: $f([0, \infty)) = \{f(x): x \geqslant 0\} = \left\{\frac{x}{1+x}: x \geqslant 0\right\} = [0, 1)$. Zatem $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$.

Czytelnik wyznaczy samodzielnie $f^{-1}: (-1, 1) \to \mathbb{R}$.

46. $f(A) = \{f(x): x \in (0, 2)\} = \{x, 3x+1): x \in (0, 2)\} = \{(x, y): x \in (0, 2), y = 3x+1\}$. Zatem $f(A)$ jest odcinkiem prostej $y = 3x+1$ leżącym nad przedziałem $(0, 2)$.

47. Czytelnik sam rozwiąże to zadanie wzorując się na rozwiązaniu zad. 46.

48. Podobnie jak w rozwiązaniu zad. 41 naszkicujmy najpierw wykres funkcji wewnętrznej $y = f(x)$ (rys. 14):



Rys. 14

Oznaczmy przez x_0 jedyne rozwiązanie równania $-\sin x + 2 = \frac{\pi}{2}$ należące do przedziału $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Teraz mamy:

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} f(x) & \text{dla } 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leqslant f(x) \leqslant \pi \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sin x & \text{dla } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{4}{\pi}(-\sin x + 2) & \text{dla } x \in \left(\frac{\pi}{2}, x_0\right] \\ 2 & \text{dla } x \in (x_0, \pi]. \end{cases}$$

Czytelnik wykona wykres funkcji h i wyznaczy obraz przedziału $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ poprzez tę funkcję.

49. Rozwiązanie tego zadania jest niewątpliwie łatwiejsze niż rozwiązanie zad. 48; Czytelnik zechce to zrobić.

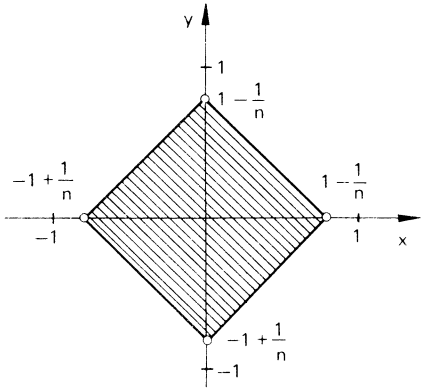
50. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ jest bijekcją (sprawdzić!). Żeby wyznaczyć funkcję odwrotną f^{-1} rozwiążmy równanie $y = f(x)$ względem x, tzn. równanie $\frac{ax+b}{cx-a} = y$. Stąd otrzymujemy

$$x = \frac{ay+b}{cy-a}.$$

Zatem $f^{-1}(y) = \frac{ay+b}{cy-a}$ lub inaczej $f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$.

51. $h(x, y) = 3y-3$ oraz $h(A) = [-6, 0]$. Oczywiście $\sup\limits_{A} h(x, y) = 0$.

52. $f^{-1}(A_n) = \left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leqslant 1-\frac{1}{n}\right\}$, dla $n = 1, 2, \ldots$ Szkic zbioru $f^{-1}(A)$ znajduje się na niżej podanym rys. 15 (zakreskowany kwadrat).

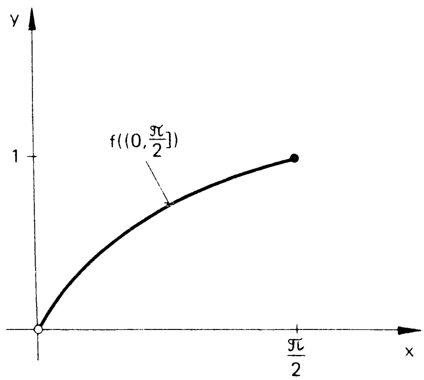


Rys. 15

Mamy też: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 1\}$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_1) = \{(0, 0)\}$.

53. $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{f(x) : x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \left\{(x, \sin x) : x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \left\{(x, y) : y = \sin x,\ x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

Niżej jest podana ilustracja geometryczna tego zbioru.



Rys. 16

54. Rozwiązanie pozostawiamy Czytelnikowi.

55. a) $f^{-1}(x, y) = \left(2-\frac{y}{3}, \frac{x}{2}+\frac{y}{6}-1\right)$ (Czytelnik sprawdzi, że f jest bijekcją),

b) znalezienie tych złożeń pozostawiamy Czytelnikowi,

c) $(g\circ f)(A) = \{(x+2y)(-3x+6): x\in[0, 2),\ y = 1\} =$
$= \{(x+2)(-3x+6): x\in[0, 2)\} = \{-3x^2+12: 0 \leqslant x < 2\} = (0, 12];$
$\sup\limits_A (g\circ f) = 12,\ \inf\limits_A (g\circ f) = 0.$

56. Z założenia $f(x+s) = f(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Oznaczmy $F(x) = f(ax)$. Mamy: $F\left(x+\frac{s}{a}\right) = f\left(a\left(x+\frac{s}{a}\right)\right) = f(ax+s) = f(ax) = F(x)$.

57. Mamy, że $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Stąd i z zad. 56 oraz z zad. 29 wnioskujemy, że okres podstawowy naszych funkcji wynosi π.

58. Okresy podstawowe wynoszą: dla $f - \pi$, dla $g - \pi$, dla $h - 2\pi$, dla $k - \frac{\pi}{2}$.

59. f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $\frac{1}{2}$ (por. zad. 14, rozdz. III).

60. $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

61. Sprawdzamy bez trudu, że dziedzina D_f naszej funkcji wynosi $D_f = \mathbb{R}$. Dalej mamy:

$$f(-x) = \log\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) = \log\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x} =$$

$$= \log\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -f(x).$$

62. Pokażemy, dla przykładu, dowód twierdzenia z punktu b. Ustalmy dowolne $x_1 < x_2$, $x_1, x_2\in D$. Z założeń mamy:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \geqslant g(f(x_2)).$$

Zatem $g\circ f$ jest malejąca.

63. a) Weźmy dowolne $y\in f(A\cup B)$. Wtedy:
istnieje $x\in A\cup B$ takie, że $f(x) = y \Leftrightarrow$ istnieje $x\in A$ takie, że $f(x) = y$ lub istnieje $x\in B$ takie, że $f(x) = y \Leftrightarrow y\in f(A)$ lub $y\in f(B) \Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$.

W dowodzie skorzystaliśmy z rozdzielności małego kwantyfikatora względem alternatywy.

b) Mamy: $y\in f(A\cap B) \Leftrightarrow$ istnieje $x\in A\cap B$ takie, że $f(x) = y \Rightarrow$ istnieje $x\in A$ takie, że $f(x) = y$ i istnieje $x\in B$ takie, że $f(x) = y \Leftrightarrow y\in f(A)$ i $y\in f(B) \Leftrightarrow y\in f(A)\cap f(B)$.

W dowodzie skorzystaliśmy z następującego prawa logicznego:

$$\bigvee_x \{\varphi(x)\wedge\psi(x)\} \Rightarrow \left[\bigvee_x \varphi(x) \wedge \bigvee_x \psi(x)\right].$$

Pokażemy teraz na przykładzie, że w powyżej dowodzonym wzorze nie można inkluzji zastąpić równością. Weźmy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ oraz $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$. Wtedy $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, zaś $f(A) \cap f(B) = (0, 1) \cap (0, 1) = (0, 1)$.

c) $y \in f(A) \setminus f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \wedge \sim (y \in f(B)) \Leftrightarrow$ istnieje $x \in A$, takie że $f(x) = y$ i $\sim$ (istnieje $x \in B$ takie, że $f(x) = y$) $\Rightarrow$ istnieje $x \in A$, takie że $x \notin B$ i $y = f(x) \Leftrightarrow$ istnieje $x \in A \setminus B$ takie, że $f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(A \setminus B)$.

Pokażemy, że w tym wzorze nie można na ogół inkluzji zastąpić równością. Rzeczywiście, weźmy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [-1, 1]$, $B = [-1, 0]$. Wtedy $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$, zaś $f(A \setminus B) = f((0, 1]) = (0, 1]$.

64. Udowodnimy pierwszy wzór. Niech $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Wtedy mamy:

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A$$
$$\text{i } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ i } x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Dowód drugiego wzoru pomijamy.

Udowodnimy wzór trzeci. Mamy:

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A)).$$

Czytelnik sam skonstruuje przykład pokazujący, że w trzecim wzorze inkluzji nie można zastąpić równością.

65. Załóżmy najpierw, że dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego $A \subset X$ jest prawdziwa implikacja:

$$x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A).$$

Ustalmy dowolne $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ i weźmy $A = \{x_2\}$. Wtedy $x_1 \notin A$, więc z założenia wynika, że $f(x_1) \notin f(A) = \{f(x_2)\}$, co oznacza, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zatem f jest injekcją.

Na odwrót, załóżmy, że f jest injekcją. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieją $x \in X$ oraz $A \subset X$ takie, że $x \notin A$ i $f(x) \in f(A)$. Stąd wynika, że istnieje $x_1 \in A$ takie, że $f(x_1) = f(x)$. Oczywiście musi być $x_1 \neq x$ (bo $x \notin A$). Otrzymujemy sprzeczność z założeniem i koniec dowodu.

66. Załóżmy najpierw, że f jest injekcją. Mamy:

$$x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A.$$

Dodatnia implikacja jest konsekwencją założenia i twierdzenia z zad. 65 (por. również wzór trzeci z zad. 64).

Na odwrót, załóżmy, że $f^{-1}(f(A)) = A$ dla każdego $A \subset X$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że f nie jest injekcją, tzn. istnieją $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ i takie, że $f(x_1) = f(x_2)$. Weźmy $A = \{x_1\}$. Wtedy $f(A) = \{f(x_1)\}$. Dalej mamy: $f^{-1}(f(A)) \supset \{x_1, x_2\}$. Zatem $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(f(A))$, $\{x_1\} = A$ i sprzeczność.

67. Dowód tego twierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi (por. rozwiązanie zad. 65 i zad. 66).

68. Udowodnimy dla przykładu wzór drugi, pozostawiając dowody pozostałych wzorów Czytelnikowi.

Mamy: $y \in f(\bigcap_{t \in T} A_t) \Leftrightarrow$ istnieje $x \in \bigcap_{t \in T} A_t$ takie, że $f(x) = y \Leftrightarrow$ istnieje x takie, że dla każdego $t \in T$ istnieje $x \in A_t$ takie, że $f(x) = y \Leftrightarrow$ dla każdego $t \in T$ zachodzi, że $y \in f(A_t) \Leftrightarrow y \in \bigcap_{t \in T} f(A_t)$.

69. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

70. Przypuśćmy, że f nie jest injekcją. Wtedy istnieją $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ takie, że $f(x_1) = f(x_2)$. Stąd $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, co na mocy założenia oznacza, że $x_1 = x_2$. Sprzeczność.

Żeby pokazać, że g jest surjekcją, weźmy dowolne $x \in X$. Należy wskazać $y \in Y$ takie, że $g(y) = x$. W tym celu przyjmijmy, że $y = f(x)$. Istotnie, mamy: $g(y) = g(f(x)) = x$ i koniec dowodu.

Pokażemy teraz na przykładzie, że f i g nie muszą być bijekcjami. Weźmy $X = [0, 2]$, $Y = [0, 3]$, $f: X \to Y$, $f(x) = \frac{x}{2}$ oraz $g: Y \to X$ określoną jako

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla} \quad x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla} \quad x \in (1, 3]. \end{cases}$$

Wtedy $g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in X$. Oczywiście tutaj f nie jest surjekcją i g nie jest różnowartościowa.

71. Niech $m_1 = \sup_{x \in A} f(x)$ i $m_2 = \sup_{x \in A} g(x)$. Wtedy $f(x) \leqslant m_1$ oraz $g(x) \leqslant m_2$ dla każdego $x \in A$. Dodając te nierówności stronami otrzymujemy, że $f(x) + g(x) \leqslant m_1 + m_2$ dla każdego $x \in A$. Zatem $m_1 + m_2$ jest majorantą funkcji $f + g$ na zbiorze A. Stąd $\sup_{x \in A} [f(x) + g(x)] \leqslant m_1 + m_2$ i koniec dowodu.

72. Czytelnik sam przeprowadzi dowód; można wzorować się na rozwiązaniu zad. 71.

73. Z definicji wynika, że $\sup_{x \in A} [-f(x)] = \sup [-f(A)]$. Korzystając z zad. 53, rozdz. III, otrzymujemy stąd, że

$$\sup [-f(A)] = -\inf f(A) = -\inf_{x \in A} f(x).$$

I zrobione.

74. Weźmy $x \in A$. Wtedy $f(x) = [f(x) + g(x)] - g(x)$, więc korzystając z zad. 71 i 73 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} f(x) &\leqslant \sup_{x \in A} [f(x) + g(x)] + \sup_{x \in A} (-g(x)) = \\ &= \sup_{x \in A} [f(x) + g(x)] - \inf_{x \in A} g(x). \end{aligned}$$

Stąd nasza nierówność.

75. Korzystając z nierówności $f(x) = (f(x) - g(x)) + g(x) \leqslant \leqslant |f(x) - g(x)| + g(x)$ oraz z zad. 71 otrzymujemy, że

$$\sup_{x \in A} f(x) - \sup_{x \in A} g(x) \leqslant \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Podobnie, wychodząc z nierówności $g(x) = (g(x) - f(x)) + f(x) \leqslant |f(x) - g(x)| + f(x)$, otrzymujemy

$$-\left[\sup_{x \in A} f(x) - \sup_{x \in A} g(x)\right] \leqslant \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Koniec dowodu.

76. Wskazówka: Skorzystać z zad. 71 oraz zad. 74.

77. $$\sup_{(x,y) \neq (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}, \quad \inf_{(x,y) \neq (0,0)} f(x, y) = -\frac{1}{2}.$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności $(x-y)^2 \geqslant 0$ oraz $(x+y)^2 \geqslant 0$.

78. Wskazówka: Skorzystać z zad. 35.

79. Ustalmy dowolne α, $\alpha \in [0, 1]$. Dla $x \geqslant 0$ mamy, że $x \geqslant \alpha x$, więc $x^2 - x \leqslant x^2 - \alpha x$. Zatem $\min\limits_{\alpha \in [0, 1]} (x^2 - \alpha x) = x^2 - x$.

Gdy $x < 0$ to $-\alpha x > 0$, więc $x^2 - \alpha x \geqslant x^2$. Zatem $\min\limits_{\alpha \in [0, 1]} (x^2 - \alpha x) = x^2$.

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

Teraz już łatwo otrzymujemy, że $f^{-1}((-1, 1)) = \left(-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

80. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$. Niech $\sup\limits_{f \in \mathscr{F}} f(x_2) = m$. Wtedy $f(x_2) \leqslant m$ dla każdego $f \in \mathscr{F}$. Z drugiej strony $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ dla każdego $f \in \mathscr{F}$, więc $f(x_1) \leqslant m$ dla $f \in \mathscr{F}$. Zatem $\sup\limits_{f \in \mathscr{F}} f(x_1) \leqslant m$. Inaczej: $\bar{f}(x_1) \leqslant \bar{f}(x_2)$. Zrobione.

81. Pokażemy np., że jeśli $f(t, x)$ jest rosnąca ze względu na t i malejąca ze względu na x, a funkcja $x = x(t)$ jest malejąca, to funkcja $t \to f(t, x(t))$ jest rosnąca. W tym celu weźmy $t_1, t_2 \in D$, $t_1 < t_2$. Wtedy $x(t_1) \geqslant x(t_2)$. Mamy dalej:

$$f(t_1, x(t_1)) \leqslant f(t_2, x(t_1)) \leqslant f(t_2, x(t_2)).$$

Dowody pozostałych stwierdzeń z zadania pozostawiamy Czytelnikowi.

82. Jeżeli liczby 1 i $\sqrt{2}$ są okresami funkcji f, to dla dowolnych liczb całkowitych m i n zachodzi równość $f(m + n\sqrt{2}) = f(0)$. Określmy więc funkcję f w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x \text{ jest liczbą postaci } m+n\sqrt{2},\ m,\ n\in\mathbb{Z} \\ 1 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Funkcja ta nie jest stała (dlaczego?) i spełnia warunki naszego zadania.

83. Korzystając z rozwiązania zad. 82 widzimy, że liczby postaci $m\sqrt{2}-n$ $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$ są okresami naszej funkcji f. Korzystając z twierdzenia Dirichleta (por. zad. 79, rozdz. III), dla zadanego dowolnie $\varepsilon > 0$ dobierzmy $m\in\mathbb{Z}$ i $n\in\mathbb{N}$ tak, żeby $|m\sqrt{2}-n| \leqslant \varepsilon$. Wtedy dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$, mamy

$$f(x+m\sqrt{2}-n) = f(x),$$

a więc f jest mikrookresowa.

84. Ustalmy dowolnie $x\in\mathbb{R}$. Dalej, niech $\varepsilon > 0$ będzie zadaną dowolnie liczbą. Korzystając z ciągłości funkcji f wnioskujemy, że istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|y-x| \leqslant \delta$ to $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Niech więc z będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Załóżmy np., że $z < x$. Dobierzmy dalej okres ω funkcji f tak mały, żeby dla pewnej liczby naturalnej n zachodziło, że $|z+n\omega-x| \leqslant \delta$. Wtedy z ciągłości funkcji f w punkcie x otrzymujemy, że $|f(z+n\omega)-f(x)| \leqslant \varepsilon$. Ale $f(z+n\omega) = f(z)$, więc $|f(z)-f(x)| \leqslant \varepsilon$. Wobec dowolności liczby ε oznacza to, że $f(z) = f(x)$ i koniec dowodu.

85. Zauważmy najpierw, że $f(x) \neq 1$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$. Gdyby bowiem $f(x) = 1$ dla pewnego $x\in\mathbb{R}$, to wtedy z podanej w zadaniu równości otrzymujemy, że $f(x) = -1$ i mamy sprzeczność. Podobnie wnioskujemy, że $f(x) \neq -1$ oraz $f(x) \neq 0$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$.

Stąd wynika, że podana w zadaniu równość może być zapisana równoważnie w postaci

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$.

Po podstawieniu do tej równości w miejsce x liczby $x+a$ otrzymujemy

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)}.$$

Teraz, podstawiając w powyższej równości w miejsce x liczbę $x+2a$ otrzymujemy

$$f(x+4a) = -\frac{1}{f(x+2a)} = -\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}} = f(x).$$

Zatem f jest okresowa o okresie $4a$.

86. Wypukłość g na przedziale $(0, \infty)$ oznacza, że dla dowolnych $u_1, u_2 \in (0, \infty)$ oraz $\alpha \in [0, 1]$ jest spełniona nierówność

$$g\big(\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2\big) \leqslant \alpha g(u_1) + (1-\alpha) g(u_2). \qquad (*)$$

Ustalmy dowolnie trzy liczby dodatnie x, x_1, x_2 takie, że $x < x_1 < x_2$. Podstawmy w $(*)$ $u_1 = x, u_2 = x_2$ oraz $\alpha = (x_2 - x_1)/(x_2 - x)$. Wtedy $\alpha \in (0, 1)$ oraz $1 - \alpha = (x_1 - x)/(x_2 - x)$ i otrzymujemy

$$g(x_1) \leqslant \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x} g(x) + \frac{x_1 - x}{x_2 - x} g(x_2).$$

Przechodząc w powyższej nierówności do granicy przy $x \to 0$, otrzymujemy

$$g(x_1) \leqslant \frac{x_2 - x_1}{x_2} a + \frac{x_1}{x_2} g(x_2) \leqslant \frac{x_1}{x_2} g(x_2),$$

co oznacza, że ϕ jest funkcją rosnącą.

Czytelnik może teraz łatwo udowodnić stwierdzenie z drugiej części zadania.

Rozdział V

ELEMENTY TOPOLOGII W PRZESTRZENIACH METRYCZNYCH

2. 1) $K(x, r) = \{x\}, \bar{K}(x, r) = \{x\}$, $S(x, r) = \emptyset$,
2) $K(x, r) = \{x\}, \bar{K}(x, r) = X$, $S(x, r) = X \setminus \{x\}$,
3) $K(x, r) = X, \bar{K}(x, r) = X$, $S(x, r) = \emptyset$.

3. d nie jest metryką.

5. a) Por. zad. 45, rozdz. IV, **b)** pozostawiamy Czytelnikowi prosty dowód.

6. Sprawdzenia wymaga jedynie warunek trójkąta, ponieważ dowód zachodzenia pozostałych warunków jest bardzo prosty.

Weźmy zatem $x, y, z \in X$. Ponieważ $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ oraz funkcja $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ jest rosnąca na $\mathbb{R}_+$ (zob. zad. 45, rozdz. IV), więc

$$d_1(x, z) = \frac{d(x, z)}{1+d(x, z)} \leqslant \frac{d(x, y)+d(y, z)}{1+d(x, y)+d(y, z)} =$$
$$= \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)+d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1+d(x, y)+d(y, z)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1+d(y, z)} = d_1(x, y) + d_1(y, z).$$

Stąd wynika, że d_1 spełnia warunek trójkąta.

8. Pokażemy np., że d_e jest metryką w $\mathbb{R}^k$. Dowód, że d_m i d_t są metrykami (znacznie prostszy niż dla d_e) pozostawiamy Czytelnikowi.

Niech więc $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ będą dowolnie ustalonymi elementami z $\mathbb{R}^k$. Mamy:

$$d_e(x, y) \geqslant 0$$

oraz

$$d_e(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots +$$
$$+ (x_k - y_k)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 = 0, (x_2 - y_2)^2 = 0, \ldots,$$
$$(x_k - y_k)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_k = y_k \Leftrightarrow x = y.$$

Dalej jest widoczne, że $d_e(x, y) = d_e(y, x)$.

Aby udowodnić warunek trójkąta napiszemy:

$$d_e^2(x,z) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} [(x_i - y_i)^2 + (y_i - z_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)(y_i - z_i).$$

Teraz korzystając z nierówności Schwartza (zob. zad. 58, rozdz. III) możemy napisać

$$\sum_{i=1}^{k} (x_1 - y_1)(y_i - z_i) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i)^2}\ .$$

Stąd mamy

$$d_e^2(x,z) \leqslant \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i)^2 +$$
$$+2\sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i)^2} =$$
$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i)^2}\right)^2 =$$
$$= (d_e(x, y) + d_e(y, z))^2.$$

Zatem

$$d_e(x,z) \leqslant d_e(x,y) + d_e(y,z),$$

co daje warunek trójkąta dla funkcji d_e. Zatem d_e jest metryką w zbiorze $\mathbb{R}^k$.

9. a) diam $\mathbb{N} = 1$,

b) $K\left(2, \frac{1}{3}\right) = \{2, 3, 4, 5\}, \bar{K}\left(2, \frac{1}{3}\right) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

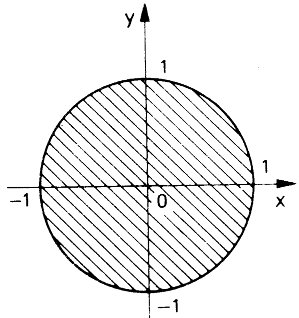
c) wystarczy zauważyć, że $K\left(1, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \{1\}$ oraz $K\left(n, \frac{1}{n(n+1)}\right) \cap \mathbb{N} =$ $= \{n\}$ dla $n > 1$. Zatem każdy punkt zbioru $\mathbb{N}$ jest punktem izolowanym,

d) $\operatorname{Fr}\{n \in \mathbb{N}: n \geqslant 3\} = \emptyset$, co jest konsekwencją punktu c,

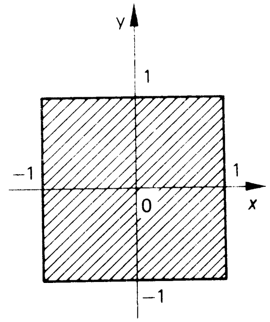
e) $\mathbb{N}$ nie jest przestrzenią spójną (por. punkt c).

10. Kulę $\bar{K}((0,0),1)$ w metryce euklidesowej przedstawiono na rys. 17, w metryce maksimum — na rys. 18, w metryce taksówkowej — rys. 19.

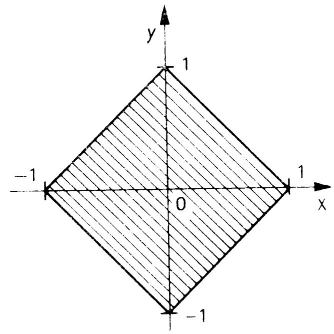
Czytelnik wyznaczy już teraz łatwo $S((1,2),2)$ w tych trzech metrykach.



Rys. 17



Rys.18



Rys. 19

11. a) diam $[-1, 1] = 1$, $\mathrm{diam}(-1, +\infty) = \frac{3}{2}$, diam $[-\infty, 2) = \frac{5}{3}$,

b) $K\left(0, \frac{1}{2}\right) = (-1, 1)$, $S(1, 1) = \{-1\}$, $\bar{K}\left(+\infty, \frac{3}{2}\right) = [-1, +\infty]$,

c) $\mathrm{dist}(A, B) = \frac{2}{3}$.

12. $A = \left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots\right\}$; diam $A = \frac{1}{\pi}$.

13. Średnica tego zbioru (kolejno w metryce euklidesowej, maksimum i taksówkowej) wynosi: $\sqrt{2}$, 1, 2.

14. Oznaczmy przez dist_e, dist_m, dist_t odległość w metryce euklidesowej, maksimum i taksówkowej, odpowiednio. Mamy:

$$\mathrm{dist}_e((1, 1), A) = \sqrt{2} - 1,$$

$$\mathrm{dist}_m((1, 1), A) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathrm{dist}_t((1, 1), A) = 2 - \sqrt{2}.$$

Z drugiej strony

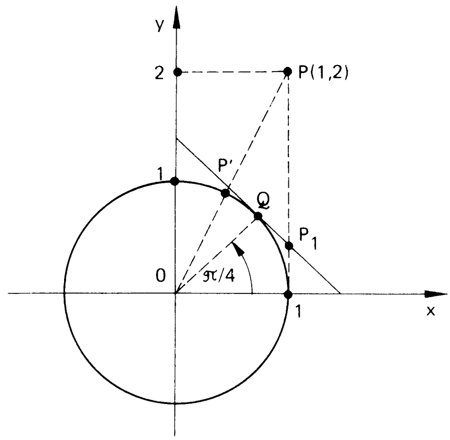
$$\mathrm{dist}_e((1, 2), A) = \sqrt{5} - 1,$$

$$\mathrm{dist}_m((1, 2), A) = 1,$$

$$\mathrm{dist}_t((1, 2), A) = 3 - \sqrt{2}.$$

Ostatnie dwie równości nie są tak „oczywiste". Dla przykładu pokażemy, że $\mathrm{dist}_t((1, 2), A) = 3 - \sqrt{2}$. W tym celu rozpatrzmy sytuację rozważaną tutaj na rys. 20:

Niech punkt Q leży na środku łuku okręgu zawartego w pierwszej ćwiartce. Wtedy $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraz $d_t(P, Q) = 3 - \sqrt{2}$. Pokażemy, że punkt Q realizuje



Rys. 20

odległość $\operatorname{dist}_t((1,2), A)$. Rzeczywiście, nietrudno przekonać się, że liczba $d_t(P, Q)$ jest równa długości odcinka PP_1 (QP_1 jest styczną do okręgu w punkcie Q). Z drugiej strony, taksówkowa odległość innego punktu koła A od P jest większa od $d_t(P, Q)$.

15. Sporządzając odpowiedni rysunek i posługując się twierdzeniem Pitagorasa, Czytelnik sprawdzi, że:

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 2\sqrt{r^2-1} & \text{dla } 1 < r \leqslant \sqrt{2} \\ \sqrt{r^2+4-2\sqrt{r^2-1}} & \text{dla } \sqrt{2} < r \leqslant \sqrt{10} \\ 2\sqrt{2} & \text{dla } r > \sqrt{10}\,. \end{cases}$$

16.

$$\varphi(r) = \begin{cases} 2r\sqrt{1-r^2/4} & \text{dla } 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2} \\ 2 & \text{dla } r > \sqrt{2}\,. \end{cases}$$

17.

$$g(r) = \begin{cases} 2r & \text{dla } 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 2 & \text{dla } r > 1. \end{cases}$$

18. $\bar{A} = A \cup \{1\}$, $A^d = \mathbb{N}$.

19. $A^d = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

20. Możemy wziąć np. $A = (1,2) \cup (3,4)$, $B = (2,4)$.

21. $A^d = \{0\}$, $\operatorname{Fr} A = \bar{A} = \{0\} \cup A$.

22. $\bar{C} = C \cup \{-1, 1\} = \operatorname{Fr} C$, $C^d = \{-1, 1\}$.

23. $A^d = \left\{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, $(A^d)^d = \{0\}$, $((A^d)^d)^d = \emptyset$.

24. Niech $a = \sup A$. Z założenia mamy, że $a \notin A$. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $x \in A$ taki, że $a - \varepsilon < x$. Stąd mamy, że $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = K(a,\varepsilon)$ oraz $x \neq a$. Zatem $a \in A^d$.

25. $A^d = \{(1,0),(-1,0)\}$, $B^d = B \cup (\{0\} \times [-1,1]$, $C^d = C \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.

26. $f^{-1}(B) = \left\{\left(\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right), \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-1\right)\right): n \in \mathbb{N}\right\}$. $(f^{-1}(B))^d = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$.

28. $\bar{A} = A \cup \{(1,2),(1,-2)\}$, $A^d = \{(1,2),(1,-2)\}$, $\operatorname{Fr} A = \bar{A}$, $\bar{B} = ([0,1] \cup \{2\}) \times [0,1]$, $B^d = \bar{B}$, $\operatorname{Fr} B = ([0,1] \times \{0,1\}) \cup (\{0,1,2\} \times [0,1])$, $\bar{C} = C \cup \{(0,1)\} = \operatorname{Fr} C$, $C^d = \{(0,1)\}$.

29. $\bar{A} = A^d = A \cup \left(\{0\} \times \left(\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)\right)$, $\mathring{A} = \emptyset$.

30. $\mathring{A} = \left\{(x,y): 1 < x^2+y^2 < 6{,}5\right\} \cup \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} \left\{(x,y): n^2 < x^2+y^2 < n^2 + \frac{1}{n^2} + 2\right\}$.

31. $\bar{A} = A^d = A \cup \{(x,y): y = 2x\}$.

32. $\operatorname{Fr} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

33. $\bar{A} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-1,1]$, $\mathring{A} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1,1)$, $\operatorname{Fr} A = \{\text{boki prostokąta } \bar{A}\}$.

34. $\bar{A} = A \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,1])$; A nie jest domknięty.

35. Wynika to stąd, że dla dowolnego punktu x tej przestrzeni zachodzi równość $K\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$.

36. Wskazówka: Przeprowadzić dowód nie wprost.

37. W przestrzeni $\mathbb{R}$ mamy:

$\mathbb{N}^d = \mathbb{Z}^d = \emptyset$,

zaś w przestrzeni $\bar{\mathbb{R}}$:

$\mathbb{N}^d = \{+\infty\}$, $\mathbb{Z}^d = \{-\infty, +\infty\}$.

38. Nie, np. jeżeli X jest przestrzenią z metryką $0-1$, to $\bar{K}(x,1) = X$, $\operatorname{Fr}\bar{K}(x,1) = \emptyset$, a $S(x,1) = X \setminus \{x\}$.

39. Nie, np. w przestrzeni z metryką $0-1$.

40. Niech $y \in K(x,r)$. Weźmy $K(y, r-d(x,y))$. Wtedy $K(y, r-d(x,y)) \subset K(x,r)$, bo:

$$z \in K(y, r-d(x,y)) \Rightarrow d(y,z) < r-d(x,y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(x,y)+d(y,z) < r \Rightarrow d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z) < r \Rightarrow z \in K(x,r).$$

Stąd wynika, że $K(x,r)$ jest zbiorem otwartym.

41. Rozważmy rodzinę $\{A_t\}_{t\in T}$ zakładając, że A_t jest zbiorem otwartym w przestrzeni metrycznej X, dla każdego $t\in T$. Weźmy $x\in \bigcup_{t\in T} A_t$. Wtedy istnieje $t_0\in T$ takie, że $x\in A_{t_0}$. Ponieważ A_{t_0} jest otwarty, więc istnieje $r>0$ takie, że $K(x,r)\subset A_{t_0}$. Stąd $K(x,r)\subset A_{t_0}\subset \bigcup_{t\in T} A_t$, a więc $\bigcup_{t\in T} A_t$ jest zbiorem otwartym.

Załóżmy teraz, że zbiory $B_1, B_2, ..., B_n$ są otwarte w X. Weźmy $x\in \bigcap_{i=1}^{n} B_i$. Wtedy $x\in B_i$, dla każdego $i=1,2,...,n$. Ponieważ B_i jest otwarty, więc istnieje $r_i>0$ takie, że $K(x,r_i)\subset B_i$, $i=1,2,...,n$. Niech $r=\min\{r_1,r_2,...,r_n\}>0$. Wtedy $K(x,r)\subset K(x,r_i)\subset B_i$ dla każdego $i=1,2,...,n$, więc $K(x,r)\subset \bigcap_{i=1}^{n} B_i$. Zatem $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ jest zbiorem otwartym.

42. W przestrzeni $\mathbb{R}$ weźmy ciąg kul $K\left(0,\frac{1}{n}\right)=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $n=1,2,...$ Są to zbiory otwarte. Ale $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K\left(0,\frac{1}{n}\right)=\{0\}$, a $\{0\}$ nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$.

43. Załóżmy, że A jest zbiorem otwartym w przestrzeni metrycznej X. Niech $x\in\overline{A'}$. Należy pokazać, że $x\in A'$.

Przypuśćmy, dla dowodu niewprost, że $x\notin A' \Rightarrow x\in A$. Z otwartości A wynika, że istnieje $r>0$ takie, że $K(x,r)\subset A \Rightarrow K(x,r)\cap A'=\emptyset$. Zatem x nie jest punktem domknięcia zbioru A i sprzeczność.

Dowód implikacji odwrotnej pozostawiamy Czytelnikowi.

44. Skorzystać z zad. 41 i 43 oraz z zad. 13 i 47, rozdz. II.

45. W przestrzeni $\mathbb{R}$ weźmy ciąg zbiorów domkniętych $A_n=\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$, $n=1,2,...$ Wtedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=(-1,1)$ i nie jest to zbiór domknięty.

47. Niech $z\in K(A,r)$. Wtedy dist $(z,A)<r$. Zatem istnieje $y\in A$ takie, że $d(z,y)<r$. Stąd $z\in K(y,r)\subset \bigcup_{x\in A} K(x,r)$.

Dowód inkluzji odwrotnej pozostawiamy Czytelnikowi.

48. Prosty dowód wskazanej w zadaniu inkluzji pozostawiamy Czytelnikowi. W celu pokazania, że inkluzji nie można na ogół zastąpić równością, weźmy zbiór X (złożony przynajmniej z dwóch punktów) z metryką $0-1$. Wtedy dla $r_1=r_2=\frac{2}{3}$ oraz dla ustalonego $x\in X$ mamy:

$$K(x,r_1)=\{x\},\ K(K(x,r_1),r_2)=K(x,r_2)=\{x\}.$$

Z drugiej strony

$$K(x,r_1+r_2)=X\neq\{x\}.$$

49. Jeżeli $x \in \bar{A}$, to dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ mamy $K\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$. Zatem istnieje $y_n \in A$ taki, że $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Oznacza to z jednej strony, że $\operatorname{dist}(x, A) = 0$, a z drugiej strony mamy, że ciąg $\{y_n\}$ jest zbieżny do punktu x w przestrzeni X.

Dowody implikacji odwrotnych są równie proste.

52. Weźmy dowolny $b \in B$. Z założenia istnieje $a \in A$ taki, że $d(a, b) < r$. Stąd $a \in K(b, r)$ i dalej, $a \in K(B, r)$. Zatem $a \in A \cap K(B, r)$. Daje to z jednej strony, że $A \cap K(B, r) \neq \emptyset$, zaś z drugiej strony pokazuje, że dla każdego $b \in B$ istnieje $a \in A \cap K(B, r)$ takie, że $d(a, b) < r$. To z kolei oznacza, że $b \in K(A \cap K(B, r), r)$ i koniec dowodu.

54. Z zadania 53 mamy, że $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$.
Aby udowodnić implikację odwotną weźmy dowolnie ustaloną liczbę $r > 0$ oraz $x \in \bar{\bar{A}}$. Wtedy istnieje $y \in \bar{\bar{A}}$ taki, że $d(x, y) < \frac{r}{2}$. Ponieważ $y \in \bar{A}$, więc istnieje $z \in A$ taki, że $d(y, z) < \frac{r}{2}$. Stąd mamy

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < r,$$

a zatem $K(x, r) \cap A \neq \emptyset$ dla każdego $r > 0$. Oznacza to, że $x \in \bar{A}$.

55. Z zadania 53 mamy, że $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Ponieważ $\bar{A} \cup \bar{B}$ jest zbiorem domkniętym (zob. zad. 44), więc $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Z drugiej strony, niech $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Wtedy $x \in \bar{A}$ lub $x \in \bar{B}$. Załóżmy np., że $x \in \bar{A}$. Wtedy dla każdego $r > 0$ zachodzi, że $K(x, r) \cap A \neq \emptyset$ skąd $K(x, r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Zatem $x = \overline{A \cup B}$. Pokazuje to, że $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

57. Niech $x \in \bar{A} \setminus \bar{B}$. Stąd $x \in \bar{A}$ i $x \notin \bar{B}$. Ponieważ $x \in \bar{A}$, więc dla dowolnego $r > 0$ zachodzi, że $K(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Ale $x \notin \bar{B}$, więc istnieje $r_0 > 0$ takie, że $K(x, r) \cap B = \emptyset$ dla $0 < r \leqslant r_0$. W konsekwencji, dla każdego $r > 0$ mamy, że $K(x, r) \cap B' \neq \emptyset$.

Dalej wnioskujemy, że $K(x, r) \cap (A \cap B') \neq \emptyset$ dla każdego $r > 0$, a więc $x \in \overline{A \cap B'}$. Ponieważ $A \cap B' = A \setminus B$ (por. zad. 14, rozdz. II), więc $x \in \overline{A \setminus B}$.

Biorąc $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$ w przestrzeni $\mathbb{R}$ widzimy, że inkluzji w zad. 56 nie można zastąpić równością.

Z drugiej strony, dla $A = (0, 2)$, $B = (0, 1)$ (także w $\mathbb{R}$) mamy:

$$\bar{A} \setminus \bar{B} = (1, 2], \quad \text{ale} \quad \overline{A \setminus B} = [1, 2].$$

58. To, że $\overline{G \cap A} = \overline{G \cap \bar{A}}$, jest prostą konsekwencją zad. 53. Aby udowodnić inkluzję odwrotną załóżmy, że $x \in \overline{G \cap \bar{A}}$. Wtedy dla dowolnego $r > 0$ zachodzi, że $K(x, r) \cap G \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Zatem istnieje punkt $y \in G \cap \bar{A}$ taki, że $d(x, y) < r$. Ponieważ $y \in G$ i G jest otwarty, więc istnieje $r_1 > 0$ takie, że $K(y, r_1) \subset G$.

Z drugiej strony $y \in \bar{A}$, zatem $K(y, r_1) \cap A \neq \emptyset$. Stąd $K(y, r_1) \cap G \cap A \neq \emptyset$. Dobierzmy teraz r_1 tak, żeby $r_1 < r - d(x, y)$. Wtedy $K(y, r_1) \subset K(x, r)$. Zatem $K(x, r) \cap A \cap G \neq \emptyset$, a to oznacza, że $x \in \overline{A \cap G}$.

60. Inkluzja $\mathring{\mathring{A}} \subset \mathring{A}$ wynika z zad. 59.

Na odwrót, załóżmy, że $x \in \mathring{A}$. Wtedy istnieje $r > 0$ takie, że $K(x, r) \subset A$. Korzystając z zad. 40 wnioskujemy, że $K(x, r) = \overbrace{K(x, r)}^{\circ} \subset \mathring{A}$, a to oznacza, że $x \in \mathring{\mathring{A}}$.

61. Mamy $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$, a ponieważ $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ jest zbiorem otwartym, więc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overbrace{A \cap B}^{\circ}$.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną załóżmy, że $x \in \overbrace{A \cap B}^{\circ}$. Wtedy istnieje $r > 0$ takie, że $K(x, r) \subset A \cap B$. Stąd $K(x, r) \subset A$ i $K(x, r) \subset B$ co daje, że $x \in \mathring{A}$ i $x \in \mathring{B}$. Zatem $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

62. Jeżeli $x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}$, to $x \in \mathring{A}$ lub $x \in \mathring{B}$. Załóżmy np., że $x \in \mathring{A}$. Wtedy znajdziemy $r > 0$ takie, że $K(x, r) \subset A$. Stąd $K(x, r) \subset A \cup B$, więc $x \in \overbrace{A \cup B}^{\circ}$ i koniec dowodu.

63. Niech $x \in \overbrace{A \setminus B}^{\circ}$. Wtedy istnieje $r > 0$ takie, że $K(x, r) \subset A \setminus B = A \cap B'$ (zob. zad. 14, rozdz. II). Stąd $K(x, r) \subset A$ oraz $K(x, r) \subset B'$. Oznacza to, że $x \in \mathring{A}$ oraz $x \notin \mathring{B}$. Zatem $x \in \mathring{A} \setminus \mathring{B}$.

64. Inkluzja $\overbrace{F \cup \mathring{A}}^{\circ} \subset \overbrace{F \cup A}^{\circ}$ jest konsekwencją zad. 59. Na odwrót załóżmy, że $x \in \overbrace{F \cup A}^{\circ}$. Wtedy istnieje $r > 0$ takie, że $K(x, r) \subset F \cup A$. Weźmy dowolne $y \in K(x, r)$. Jeżeli $y \in F$, to $y \in F \cup \mathring{A}$. Jeżeli zaś $y \notin F$, to ponieważ F jest domknięty, znajdziemy $r_1 > 0$ takie, że $K(y, r_1) \cap F = \emptyset$. Dobierając r_1 tak, żeby $K(y, r_1) \subset K(x, r_1)$ widzimy, że $K(y, r_1) \subset A$. Zatem $y \in \mathring{A}$, a stąd $y \in F \cup \mathring{A}$.

Reasumując otrzymujemy, że $K(x, r) \subset F \cup \mathring{A}$ co oznacza, że $x \in \overbrace{F \cup \mathring{A}}^{\circ}$. Koniec dowodu.

66. Korzystając z definicji brzegu zbioru mamy:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr}(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{X \setminus (A \cup B)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{(A \cup B)'} = \\
&= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{(A' \cap B')} \subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\overline{A'} \cap \overline{B'}) = \\
&= (\bar{A} \cap \overline{A'} \cap \overline{B'}) \cup (\bar{B} \cap \overline{A'} \cap \overline{B'}) \subset (\bar{A} \cap \overline{A'}) \cup (\bar{B} \cap \overline{B'}) = \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B.
\end{aligned}$$

W trakcie dowodu wykorzystaliśmy zad. 55 i 56.

67. Korzystając z tych samych faktów, z których korzystaliśmy w rozwiązaniu zad. 66, mamy:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr}(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \cap \overline{(A \cap B)'} \subset (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \overline{A' \cup B'} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (\overline{A'} \cup \overline{B'}) = \\
&= (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \overline{A'}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \overline{B'}) \subset (\bar{A} \cap \overline{A'}) \cup (\bar{B} \cap \overline{B'}) = \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B.
\end{aligned}$$

68. Niech $x \in \mathring{A}$. Wtedy istnieje $r > 0$ takie, że $K(x,r) \subset A$. Stąd $K(x,r) \cap A' = \emptyset$. Zatem $x \notin \operatorname{Fr} A$, a więc $x \in A \setminus \operatorname{Fr} A$.

Na odwrót, jeżeli $x \in A \setminus \operatorname{Fr} A$, to $x \in A$ oraz $x \notin \operatorname{Fr} A$. Stąd, że $x \notin \operatorname{Fr} A$ wynika, że istnieje $r > 0$ takie, że $K(x,r) \cap A = \emptyset$ lub $K(x,r) \cap A' = \emptyset$. Pierwsza sytuacja jest niemożliwa (bo $x \in A$), więc $K(x,r) \cap A' = \emptyset$. Stąd $K(x,r) \subset A$, a to oznacza, że $x \in \mathring{A}$.

69. Niech $x \in \overline{A}$. Wtedy dla dowolnego $r > 0$ zachodzi związek $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Jeżeli $x \in A$, to $x \in A \cup \operatorname{Fr} A$. Jeżeli $x \notin A$, to w kuli $K(x,r)$ znajdują się zarówno punkty z A, jak i z A', więc $x \in \overline{A} \cap \overline{A'}$, co implikuje, że $x \in \operatorname{Fr} A$ i w konsekwencji $x = A \cup \operatorname{Fr} A$.

Teraz założymy, że $x \in A \cup \operatorname{Fr} A$. Wtedy $x \in A$ lub $x \in \operatorname{Fr} A$. Jeżeli prawdą jest, że $x \in A$, to $x \in \overline{A}$. Jeżeli zaś $x \in \operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{A'}$, to stąd też wynika, że $x \in \overline{A}$. Koniec dowodu.

71. Korzystając z tego, że $\overline{A}' \subset A'$ oraz z zad. 54, mamy:

$$\operatorname{Fr} \overline{A} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{A}'} = \overline{A} \cap \overline{\overline{A}'} \subset \overline{A} \cap \overline{A'} = \operatorname{Fr} A.$$

Pokażemy, że np. inkluzji w zad. 71 nie można na ogół zastąpić równością. Istotnie, w przestrzeni $\mathbb{R}$ weźmy $A = \mathbb{Q}$. Wtedy $\operatorname{Fr} \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}'} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Z drugiej strony $\operatorname{Fr} \overline{\mathbb{Q}} = \operatorname{Fr} \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset$.

73. a) Zauważmy, że $X \setminus \overline{X \setminus A} = \overline{A'}'$, a więc należy pokazać, że $\mathring{A} = \overline{A'}'$.

Niech więc $x \in \mathring{A}$. Wtedy $K(x,r) \subset A$ dla pewnego $r > 0$. Stąd $K(x,r) \cap A' = \emptyset$, a więc $x \notin \overline{A'}$ co daje, że $x \in \overline{A'}'$. Jeżeli teraz $x \in \overline{A'}'$, to $x \notin \overline{A'}$. Zatem istnieje $r > 0$ takie, że $K(x,r) \cap A' = \emptyset$. Oznacza to, że $K(x,r) \subset A$, a więc $x \in \mathring{A}$.

b) Wzór ten jest konsekwencją wzoru z a. Sprawdzić!

c) Wynika łatwo z b.

74. Jeżeli A jest brzegowy, to $\mathring{A} = \emptyset$. Ze wzoru z zad. 73a wynika, że wtedy $X \setminus \overline{X \setminus A} = \emptyset$, a zatem $X = \overline{X \setminus A}$. Jeżeli $X = \overline{X \setminus A}$, to oznacza to, że $\overline{A'} = X$. Ponieważ $A \subset \overline{A}$, więc stąd mamy $A \subset \overline{A} \cap X = \overline{A} \cap \overline{A'}$. Wtedy $A \subset \overline{A'}$, więc $A \cap \overline{X \setminus A}' = \emptyset$. Ponieważ jednak (zad. 73a) $\overline{X \setminus A}' = \mathring{A}$, zatem $\mathring{A} = A \cap \mathring{A} = \emptyset$, co oznacza, że A jest brzegowy.

75. Jeżeli A jest brzegowy, to $\mathring{A} = \emptyset$. Zatem żadna kula otwarta nie zawiera się w A, a więc musi zawierać punkty spoza A. Stąd wynika, że każdy zbiór otwarty zawiera punkty nie należące do A. Oznacza to dalej , że A' jest zbiorem gęstym.

Teraz zakładając, że A' jest gęsty wnioskujemy, że w każdym otoczeniu dowolnego punktu z A znajdują się punkty spoza A, więc $\mathring{A} = \emptyset$.

77. Wskazówka: Skorzystać z zad. 76.

78. Załóżmy, że A, B są brzegowe oraz $A=\bar{A}$. Mamy:

$$\mathrm{Fr}\,(A\cup B)=\overline{A\cup B}\cap\overline{(A\cup B)'}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\overline{A'\cap B'}=(A\cup\bar{B})\cap\overline{A'\cap\overline{B'}}.$$

Ostatnia równość jest konsekwencją faktu, że A' jest otwarty (zad. 43 oraz zad. 58). Stąd mamy dalej:

$$\mathrm{Fr}(A\cup B)=(A\cup\bar{B})\cap\overline{A'}=A\cup\bar{B}\supset A\cup B.$$

Oznacza to (zad. 74), że $A\cup B$ jest zbiorem brzegowym.

79. Pierwsza równoważność jest konsekwencją definicji. Druga natomiast wynika z zad. 74.

80. Korzystając z zad. 75 mamy:

A jest nigdziegęsty $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ jest brzegowy $\Leftrightarrow$ każda kula $K(x,r)$ zawiera punkty nie należące do $\bar{A}$. Niech $y\in K(x,r)$ będzie taki, że $y\notin\bar{A}$. Wtedy istnieje $r_1>0$ (dobierzmy r_1 tak, żeby $K(y,r_1)\subset K(x,r)$), że $K(y,r)\cap A=\emptyset$. Oznacza to, że w każdej kuli zawiera się kula nie mająca punktów wspólnych ze zbiorem A.

81. Ponieważ $\mathring{A}\subset\mathring{\bar{A}}=\emptyset$, więc każdy zbiór nigdziegęsty jest zbiorem brzegowym.

O tym, że nie każdy zbiór brzegowy jest nigdziegęsty można się przekonać biorąc zbiór $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$.

82. Załóżmy, że A i B są brzegowe oraz A jest nigdziegęsty. Wtedy mamy:

$$\mathrm{Fr}(A\cup B)=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\overline{A'\cap B'}\supset(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\overline{\bar{A}'\cap B'}.$$

Dalej, korzystając z faktu, że $\bar{A}'$ jest otwarty i z zad. 58, otrzymujemy:

$$\mathrm{Fr}(A\cup B)\supset(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\overline{\bar{A}'\cap\overline{B'}}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\overline{\bar{A}'}=\bar{A}\cup\bar{B}\supset A\cup B,$$

przy czym skorzystaliśmy tutaj z zad. 79. Stosując wynik z zad. 74 kończymy dowód.

83. b) Domkniętość C wynika z faktu, że C można przedstawić w postaci $C=[0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, gdzie A_i $(i=1,2,\ldots)$ oznaczają przedziały otwarte usuwane z przedziału $[0,1]$. Na podstawie zad. 41 zbiór $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ jest otwarty, a zatem pisząc $C=[0,1]\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)'$ widzimy, że C jest zbiorem domkniętym jako iloczyn dwóch zbiorów domkniętych.

c) Ponieważ C jest domknięty, więc wystarczy pokazać, że C jest brzegowy. W tym zaś celu wystarczy udowodnić, że $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ jest gęsty w przedziale $[0,1]$ (por. zad. 75). Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

85. Dla ustalonych $x, y \in \mathbb{R}^k$, $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, mamy:

$$d_m(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i - y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} = d_e(x, y) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x_i - y_i)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| = d_t(x, y) \leqslant k \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i - y_i| = kd_m(x, y).$$

Stąd wynika, że wszystkie trzy metryki d_e, d_m, d_t są jednostajnie równoważne w $\mathbb{R}^k$.

86. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$, gdzie d jest naturalną metryką

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Wtedy

$$d_1(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Gdyby d i d_1 były jednostajnie równoważne na $\mathbb{R}$, to istniałaby stała $\beta > 0$ taka, że

$$d(x, y) \leqslant \beta d_1(x, y)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. W szczególności, biorąc $y = 0$ oraz $x = n$, $n \in \mathbb{N}$, mielibyśmy

$$n \leqslant \beta \frac{n}{n+1} \leqslant \beta$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i sprzeczność.

87. W s k a z ó w k a: Pokazać, że jeśli d_1 i d_2 są jednostajnie równoważne (por. zad. 85), tzn. jeśli istnieją stałe $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ takie, że $\alpha d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \beta d_1(x, y)$ dla $x, y \in X$, to wtedy

$$K_1(x, r) \subset K_2(x, \beta r)$$

oraz

$$K_2(x, r) \subset K_1(x, r/\alpha)$$

dla dowolnego $x \in X$ i dla dowolnego $r > 0$ (K_1 oznacza kulę w metryce d_1, a K_2 — kulę w metryce d_2).

88. Mamy:

$$(y_1, y_2) \in K((x_1, x_2), r) \Leftrightarrow d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) < r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} < r \Leftrightarrow d_1(x_1, y_1) < r \quad \text{i} \quad d_2(x_2, y_2) < r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y_1 \in K_1(x_1, r) \quad \text{i} \quad y_2 \in K_2(x_2, r) \Leftrightarrow (y_1, y_2) \in K_1(x_1, r) \times K_2(x_2, r).$$

89. Załóżmy, że $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni X z metryką dyskretną d. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ dla n, $m \geqslant n_0$. Stąd wynika, że $x_n = x_m$ dla $n, m \geqslant n_0$, a więc ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem prawie stałym. Zatem ciąg ten jest zbieżny do x_0 skąd wynika, że X jest zupełna.

90. Nie, bo np. ciąg $\{x_n\}$, $x_n = n$, spełnia warunek Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny w tej przestrzeni.

91. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową weźmy ciąg zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $A_n = \left\{(x,y)\colon -1 < x \leqslant 0,\ \ 0 < y < \left(\frac{1}{n}-1\right)x + \frac{1}{n}\right\} \cup \left\{(x,y)\colon\ \ 0 < x < 1,\ \ 0 < y < \left(1-\frac{1}{n}\right)x + \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Łatwo sprawdzić, że $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów spójnych, którego część wspólna nie jest zbiorem spójnym.

92. Nie. Jako przykład możemy wziąć w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (z metryką euklidesową) ciąg zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$A_n = \{(x,y)\colon -1 \leqslant x \leqslant 0,\ y \geqslant (n-1)x + n\} \cup$$
$$\cup \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant (1-n)x + n\},$$

$n = 1, 2, \ldots$ Czytelnik sprawdzi, że jest to zstępujący ciąg zbiorów spójnych i domkniętych, którego część wspólna nie jest zbiorem spójnym.

93. *Wskazówka*: Pokazać, że każde dwa punkty rozważanego zbioru można połączyć łamaną złożoną z dwóch lub trzech odcinków równoległych do osi układu współrzędnych.

94. d nie jest metryką w przestrzeni $C[a,b]$, ponieważ np. d nie spełnia warunku symetrii (sprawdzić!).

96. Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ i znajdźmy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ oraz $d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$ dla $n, m \geqslant n_0$. Wtedy

$$|a_m - a_n| = |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| = |d(x_m, y_m) -$$
$$- d(x_n, y_m) + d(x_n, y_m) - d(x_n, y_n)| \leqslant |d(x_m, y_m) -$$
$$- d(y_m, x_n)| + |d(y_m, x_n) - d(x_n, y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

dla $n, m \geqslant n_0$. Zatem ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}$ i z zupełności $\mathbb{R}$ wynika, że jest on zbieżny.

97. Zwrotność i symetria S są oczywiste. Aby pokazać, że S jest przechodnia, weźmy ciągi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\} \in A$ takie, że $\{x_n\}\ S\{y_n\}$ i $\{y_n\}\ S\{z_n\}$, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0$. Wtedy, korzystając z nierówności

$$d(x_n, z_n) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

wnioskujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$, a więc $\{x_n\}\ S\{z_n\}$.

98. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ taki, że $x_n \in A_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ i znajdźmy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że diam $A_{n_0} < \varepsilon$. Wtedy z faktu, że $\{A_n\}$ jest ciągiem zstępującym wynika, że $\{x_n: n \geqslant n_0\} \subset A_{n_0}$, zatem $d(x_n, x_m) \leqslant \operatorname{diam} A_{n_0} < \varepsilon$ dla m, $n \geqslant n_0$. Stąd $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni (X, d) i z zupełności tej przestrzeni wynika, że istnieje $x \in X$ takie, że $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Ponieważ $\{x_k : k \geqslant n\} \subset A_n$, więc z domkniętości A_n wynika, że $x \in A_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Pokażemy teraz, że x jest jedynym punktem o tej własności. Gdyby bowiem istniał $y \neq x$ taki, że $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ to stąd, że $\operatorname{diam} A_n \geqslant \operatorname{diam} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \geqslant d(x, y)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, wynikałoby, że $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} A_n$ nie może być równa zeru. Sprzeczność.

99. Jeżeli G jest otwarty w przestrzeni metrycznej (X, d), to G jest typu G_δ bowiem $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, gdzie $G_n = G$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Ale G jest również typu F_σ, ponieważ możemy napisać

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(K\left(G, \frac{1}{n}\right)\right)',$$

gdzie $K\left(G, \frac{1}{n}\right)$ oznacza kulę o środku w zbiorze G i promieniu $\frac{1}{n}$; jest to zbiór otwarty (por. zad. 47, 44 i 43).

100. W s k a z ó w k a: Skorzystać z zad. 99 i 43.

101. Jeżeli A jest F_σ, to $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, gdzie F_n są domknięte. Wtedy z praw de Morgana (zob. zad. 47, rozdz. II) wynika, że $A' = \bigcap_{n=1}^{\infty} F'_n$, a ponieważ F'_n są otwarte, więc A' jest typu G_δ. Dowód implikacji odwrotnej jest podobny.

102. Mamy: $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right)$, więc $[a, b)$ jest typu G_δ. Z drugiej strony

$$[a, b) = \bigcup_{n=k}^{\infty} \left[a, b - \frac{1}{n}\right]$$

(gdzie k jest taką liczbą naturalną, że $b - \frac{1}{k} > a$). Zatem $[a, b)$ jest również zbiorem typu F_σ.

Dowód dla przedziału $(a, b]$ jest podobny.

103. Napiszmy $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, gdzie F_n oznacza zbiór jednoelementowy (więc domknięty) złożony z n-tej liczby wymiernej (liczby ze zbioru $\mathbb{Q}$ można ustawić w ciąg: por. zad. 2, rozdz. III).

To, że $\mathbb{Q}'$ jest zbiorem typu G_δ wynika teraz z zad. 101.

104. Fakt, że $\mathbb{Q}$ jest pierwszej kategorii uzasadniamy tak samo, jak to, że $\mathbb{Q}$ jest zbiorem typu F_σ korzystając dodatkowo z tego, że zbiór jednopunktowy jest nigdziegęsty w $\mathbb{R}$.

Zauważmy dalej, że $\mathbb{Q}$ nie jest nigdziegęsty w $\mathbb{R}$, bowiem $\mathring{\bar{\mathbb{Q}}} = \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

105. Niech A będzie zbiorem I kategorii w przestrzeni metrycznej zupełnej X. Wystarczy pokazać, że w dowolnie ustalonym zbiorze otwartym G znajduje się punkt nie należący do A (por. zad. 75).

W tym celu weźmy dowolny punkt $x \in G$ oraz $r > 0$ takie, żeby $K(x, r) \subset G$. Ponieważ A jest I kategorii, więc $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, gdzie M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ są zbiorami nigdziegęstymi w X. Z wyniku zawartego w zad. 80 wynika, że istnieje $\bar{K}(x_1, r_1) \subset K(x, r)$ taka, że $\bar{K}(x_1, r_1) \cap M_1 = \emptyset$ (założenie, że bierzemy kule domknięte, nie ma tutaj żadnego znaczenia). Z faktu, że M_2 jest nigdziegęsty wynika, że istnieje kula $\bar{K}(x_2, r_2)$ taka, że $\bar{K}(x_2, r_2) \subset \bar{K}(x_1, r_1)$ oraz $\bar{K}(x_2, r_2) \cap M_2 = \emptyset$. Możemy tutaj dobrać r_2 tak, żeby $r_2 < r_1/2$. Kontynuując to postępowanie znajdziemy ciąg kul $\{\bar{K}(x_n, r_n)\}$ taki, że $\bar{K}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \bar{K}(x_n, r_n)$, $\bar{K}(x_n, r_n) \cap M_n = \emptyset$ oraz $r_n < r_1/2^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Z twierdzenia Cantora (zad. 98) wynika, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{K}(x_n, r_n)$ składa się z dokładnie jednego punktu y. Oczywiście $y \notin M_n$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$, skąd $y \notin A$. Ale $y \in G$ i koniec dowodu.

107. Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną. Gdyby X była zbiorem I kategorii, to zgodnie z twierdzeniem Baire'a (zad. 105) X byłaby zbiorem brzegowym, tzn. $\mathring{X} = \emptyset$. Ale $\mathring{X} = X$ i sprzeczność. Zatem X jest II kategorii.

108. Weźmy $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Wtedy $\mathring{A} = (a, b)$ więc A nie jest brzegowy. Zatem, zgodnie z zad. 105 A nie może być zbiorem I kategorii, więc jest zbiorem II kategorii.

109. Wskazówka: Skorzystać z zad. 108.

110. Zbiór $\mathbb{Q}$ jest I kategorii (zob. zad. 104), więc gdyby $\mathbb{Q}'$ był I kategorii, to $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ byłby zbiorem I kategorii (zad. 106). Jest to jednak sprzeczne wynikiem z zad. 107. Zatem $\mathbb{Q}'$ jest zbiorem II kategorii.

111. Gdyby $\mathbb{Q}'$ był zbiorem typu F_σ, to byłby sumą co najwyżej przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych i zarazem brzegowych (bo $\mathbb{Q}'$ jest brzegowy), czyli sumą co najwyżej przeliczalnej ilości zbiorów nigdziegęstych. Oznaczałoby to, że $\mathbb{Q}'$ jest I kategorii. Sprzeczność z zad. 110.

Stąd już wynika, że $\mathbb{Q}$ nie jest zbiorem typu G_δ (por. zad. 101).

112. Jest to prosta konsekwencja zad. 106 i 107.

113. Wskazówka: Skorzystać z zad. 112.

114. Na przykład przedział $A = (a, b)$ w przestrzeni $\mathbb{R}$ jest zbiorem II kategorii (zob. zad. 108), ale jego dopełnienie też jest zbiorem II kategorii. Zatem A nie jest rezydualny.

115. Załóżmy, że A jest rezydualny w przestrzeni metrycznej zupełnej X. Wtedy $X \setminus A$ jest I kategorii, zatem na mocy twierdzenia Baire'a (zad. 105) zbiór $X \setminus A$ jest brzegowy, tzn. $\overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}} = \emptyset$. Dalej, korzystając z zad. 73b, mamy:

$$\bar{A} = X \setminus \overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}} = X,$$

co oznacza, że A jest gęsty w X.

116. Niech A ma własność Baire'a, tzn. $A = G \vartriangle P$, gdzie G jest otwarty, zaś P jest I kategorii. Rozważmy zbiory N i Q określone następująco:

$$N = \bar{G} \setminus G,$$
$$Q = N \vartriangle P.$$

Zauważmy, że N jest domknięty, bo $N = \bar{G} \cap G'$. Ponadto, N jest nigdziegęsty. Żeby to pokazać wystarczy udowodnić, że N jest zbiorem brzegowym (ponieważ jest domknięty). Korzystając z zad. 61 mamy:

$$\mathring{N} = \overset{\circ}{\widehat{\bar{G} \cap G'}} = \mathring{\bar{G}} \cap \mathring{G'} \subset \bar{G} \cap \mathring{G'}.$$

Dalej, z zad. 73b mamy, że $\mathring{G'} = \bar{G}'$. Zatem

$$\mathring{N} \subset \bar{G} \cap \bar{G}' = \emptyset,$$

skąd $\mathring{N} = \emptyset$, a więc N jest nigdziegęsty.

Teraz łatwo już wywnioskować, że Q jest zbiorem I kategorii, ponieważ

$$Q = (N \cup P) \setminus (N \cap P) \subset N \cup P,$$

a zbiór $N \cup P$ jest I kategorii.

Następnie podstawmy $F = \bar{G}$. Wtedy korzystając z faktu, że $G = \bar{G} \vartriangle N$ (sprawdzić!) mamy

$$A = G \vartriangle P = (\bar{G} \vartriangle N) \vartriangle P = \bar{G} \vartriangle (N \vartriangle P) = F \vartriangle Q$$

(korzystamy tutaj z zad. 56, rozdz. II).

Aby udowodnić drugą część twierdzenia załóżmy, że $A = F \vartriangle Q$, gdzie F jest domknięty, zaś Q jest zbiorem I kategorii. Podstawmy $G = \mathring{F}$. Wtedy zbiór N, $N = F \setminus \mathring{F}$ jest nigdziegęsty. Rzeczywiście:

$$\mathring{N} = \overset{\circ}{\widehat{F \setminus \mathring{F}}} = \overset{\circ}{\widehat{F \cap \mathring{F}'}} = \mathring{F} \cap \overset{\circ}{\widehat{\mathring{F}'}} \subset \mathring{F} \cap \mathring{F}' \subset F \cap F' = \emptyset.$$

Stąd już łatwo otrzymujemy, że zbiór $P = N \vartriangle Q$ jest zbiorem I kategorii. Biorąc pod uwagę, że $F = G \vartriangle N$ (sprawdzić!), mamy

$$A = F \vartriangle Q = (G \vartriangle N) \vartriangle Q = G \vartriangle (N \vartriangle Q) = G \vartriangle P,$$

co kończy dowód.

117. Jest to natychmiastowa konsekwencja definicji zbioru o własności Baire'a oraz zad. 116.

118. Korzystamy ze wzoru

$$(A \vartriangle B)' = A' \vartriangle B$$

(zob. zad. 55, rozdz. II).

Załóżmy więc, że A ma własność Baire'a. Wtedy $A = G \vartriangle P$, gdzie G jest otwarty, P zaś jest I kategorii. Wtedy

$$A' = G' \vartriangle P$$

więc z zad. 116 wynika, że A' jest zbiorem o własności Baire'a.

119. Wobec zad. 118 wystarczy pokazać, że Q ma własność Baire'a. Fakt ten wynika stąd, że Q jest zbiorem I kategorii (zad. 104) oraz z zad. 117.

ROZDZIAŁ VI

CIĄGI LICZBOWE

1. **a)** ograniczony i malejący,

b) ograniczony (można pokazać, że $b_n \in [-3, 8]$ dla $n \in \mathbb{N}$); począwszy od drugiego wyrazu ściśle malejący,

c) ograniczony i malejący,

d) ograniczony z dołu przez liczbę 1, ale nieograniczony z góry. Jest to ciąg, który nie jest monotoniczny.

2. Czytelnik sam przeprowadzi proste dowody.

3. **a)** Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Załóżmy, że $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$. Stąd otrzymujemy, że $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, a więc $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Zatem wystarczy (zgodnie z definicją granicy ciągu) wziąć $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 2$.

b), c), d) — pozostawiamy Czytelnikowi.

e) Ustalmy dowolnie $M > 0$. Załóżmy, że $\log(\log n) \geqslant M$. Stąd znajdujemy, że $n \geqslant 10^{10^M}$. Zatem w definicji ciągu zmierzającego do ∞ wystarczy podstawić $n_0 = 10^{10^M}$.

4. Załóżmy, że $|a_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i weźmy liczbę $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|b_n| \leqslant \varepsilon_1$ dla $n \geqslant n_0$. Zatem, dla $n \geqslant n_0$ mamy:

$$|a_n|\,|b_n| \leqslant \varepsilon_1 \cdot M \Rightarrow |a_n b_n| \leqslant \varepsilon,$$

a to zgodnie z definicją granicy oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

5. **a)** Oznaczmy $x_n = \frac{n}{n^2+1}$, $y_n = \sin(3n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$ Wtedy oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, zaś $|y_n| = |\sin(3n+1)| \leqslant 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a więc $\{y_n\}$ jest ograniczony. Z twierdzenia z zad. 4 wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

b), **c)** — podobnie. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

6. a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-1)n}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{2} = \frac{3}{2}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+1/n^2}} = -1$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{18}$. Wskazówka: Wykorzystać wzór z zad. 2, rozdz. I,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = -\frac{1}{2}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\cdot 3^n\cdot 3+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^n\cdot 16} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{12\cdot 3^n+2\cdot 4^n}{4^n}}{\frac{5\cdot 2^n+16\cdot 4^n}{4^n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{5\left(\frac{2}{4}\right)^n+16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8},$$

f) $\frac{5}{3}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2+n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{2} = 1,$$

h) 1, **i)** $\frac{5}{2}$, **j)** $\frac{1}{2}$, **k)** 2, **l)** $\frac{4}{3}$, **m)** 1.

7. a) 7, **b)** 1, **c)** 1.

d) Dodając stronami nierówności: $\frac{k}{n^2+n} \leqslant \frac{k}{n^2+k} \leqslant \frac{k}{n^2}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, otrzymujemy

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n} \leqslant d_n \leqslant \frac{1+2+\ldots+n}{n^2},$$

skąd $\frac{1}{2} \leqslant d_n \leqslant \frac{n+1}{2n}$. Zatem na podstawie twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \frac{1}{2}$;

e) 1, **f)** 1.

8. Poszukiwana granica jest równa 2.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n^2)!}{2!\,(n^2-2)!}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = 2.$

10. 1. **11.** 1.

12. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n)\,n^3}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n)\,n^3}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n)\,n^3}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{(n^3+n)^2}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{(n^3+n)\,n^3}{n^6}}+\frac{n^2}{n^2}} = \frac{1}{3},$$

b) $\frac{4}{3}$.

13. **a)** Mamy:

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\ldots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}.$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

b) Korzystając ze wzoru z zad. 15, rozdz. I mamy:

$$b_n = \frac{n}{n+1}.$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

c) Granicę tego ciągu Czytelnik obliczy samodzielnie.

14. Ustalmy $\varepsilon > 0$ tak małe, żeby $q+\varepsilon < 1$. Znajdźmy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, żeby $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - q\right| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Dalej, biorąc dowolne $n \geqslant n_0$ mamy:

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - q\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow q-\varepsilon \leqslant \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q+\varepsilon \Rightarrow |a_{n+1}| \leqslant |a_n|(q+\varepsilon).$$

Stąd mamy $|a_{n_0+1}| \leqslant |a_{n_0}|(q+\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_0+2}| \leqslant |a_{n_0}|(q+\varepsilon)^2$ i ogólnie:

$$|a_n| \leqslant \frac{|a_{n_0}|}{(q+\varepsilon)^{n_0}}(q+\varepsilon)^n \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Zatem, na podstawie twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

15. a) Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{(n+1)n!\,2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0.$$

Stąd i z zad. 14 wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Dowód podobny jak w a.

16. Twierdzenie to jest udowodnione w rozwiązaniu zad. 75, rozdz. III.

17. Wystarczy zauważyć, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący (dowód jest trywialny) i ograniczony (zob. zad. 50, rozdz. III).
Następnie skorzystać z twierdzenia w zad. 16.

18. Bez trudu dowodzimy, że ciąg ten jest rosnący, a nawet ściśle rosnący. Korzystając z zad. 34, rozdz. I, mamy, że $a_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2$ dla $n \in \mathbb{N}$, a więc ciąg ten jest ograniczony z góry przez 2. Stąd istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oraz granica ta nie przekracza liczby 2.

19. Oznaczmy $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Zauważmy, że wyrazy obydwu ciągów są dodatnie. Mamy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Stąd i z nierówności Bernoulliego otrzymujemy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Zatem ciąg $\{a_n\}$ jest ściśle rosnący. Podobnie pokazujemy, że ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle malejący.

Z drugiej strony zauważmy, że ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z dołu, np. przez liczbę 1, zaś ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry przez liczbę 3 (por. zad. 48, rozdz. III). Zatem ciągi te są zbieżne do granic właściwych. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$. Zauważmy jeszcze, że z przeprowadzonego wyżej dowodu wynika, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

20. Zgodnie z nierównością ustaloną wyżej (tj. w rozwiązaniu zad. 19) mamy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$. Stąd

$$0 < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n} < \frac{e}{n} < \frac{3}{n},$$

dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$.

21. Niech n_k będzie dowolnym ciągiem liczb całkowitych dążącym do ∞. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takie, że $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$ dla $n > n_0$. Stąd wynika, że $\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon$ dla $n_k > n_0$. Zatem $\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e$.

Jeżeli teraz ciąg $\{a_k\}$ ($a_k > 1$) dowolnych liczb zmierza do ∞, to istnieje taki ciąg liczb całkowitych $\{n_k\}$, że $n_k \leqslant a_k < n_k+1$ oraz $n_k \to \infty$.

Zauważmy teraz, że

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} < \left(1+\frac{1}{a_k}\right)^{a_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

(por. zad. 19). Biorąc pod uwagę, że lewa i prawa strona powyższej nierówności zmierza do e, otrzymujemy $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)^{a_k} = e$.

Jeśli teraz dowolny ciąg liczb $\{b_k\}$ $(-b_k > 1)$ zmierza do $-\infty$, to podstawiając $b_k = -\alpha_k$, otrzymujemy

$$\left(1+\frac{1}{b_k}\right)^{b_k} = \left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-\alpha_k} = \left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right)^{\alpha_k-1}\left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right) \to e$$

przy $k \to \infty$.

22. a) Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ (por. zad. 14).}$$

b) Pozostawiamy Czytelnikowi.

23. Korzystając, zgodnie ze wskazówką, z nierówności

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n,$$

otrzymujemy

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n}.$$

Twierdzenie o trzech ciągach kończy dowód.

24. W punktach a, b, c, d korzystamy z zad. 21. Dla przykładu obliczymy granicę ciągu $\{c_n\}$. Mamy:

$$c_n = \left(\frac{n^2+1+2}{n^2+1}\right)^{2n^2+5} = \left(1+\frac{2}{n^2+1}\right)^{\left(\frac{n^2+1}{2}\right)4+3} =$$

$$= \left[\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}\right]^4\cdot\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right)^3 \to e^4\cdot 1 = e^4.$$

e) Zauważmy najpierw, że $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}$. Ponieważ $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$, więc (por. zad. 19) $1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < e$. Stąd $1 < \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} < e^{1/n}$.

Na podstawie twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 1$.

25. Weźmy dowolną liczbę naturalną n. Wtedy oczywiście $\{k \in \mathbb{N}: k \geqslant n\} \supset \{k \in \mathbb{N}: k \geqslant n+1\}$, więc (por. zad. 35, rozdz. IV) $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \beta_{n+1} \leqslant \beta_n$. Zatem ciąg $\{\alpha_n\}$ jest rosnący, zaś ciąg $\{\beta_n\}$ jest malejący. Ponadto $\alpha_n \leqslant \beta_1$ oraz $\beta_n \geqslant \alpha_1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że $\{\alpha_n\}$ jest ograniczony z góry, zaś $\{\beta_n\}$ z dołu. Teza naszego stwierdzenia wynika z zad. 16.

26. Nierówności te są konsekwencją faktów ustalonych w rozwiązaniu poprzedniego zadania.

27. **a)** Wyznaczając ciągi $\{\alpha_n\}$ i $\{\beta_n\}$ z zad. 25 mamy w naszym przypadku:

$$\alpha_n = -1, \ \beta_n = 1 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

a więc $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 2$,

c) $\liminf\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{1}{e}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n = e$,

d) $\liminf\limits_{n\to\infty} d_n = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} d_n = 1$.

28. Standardowy dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

29. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Wtedy dla liczby $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n| \geqslant M$ dla $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd $\dfrac{1}{|a_n|} \leqslant \dfrac{1}{M} = \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$, tzn. że $\left|\dfrac{1}{a_n}\right| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Zgodnie z definicją granicy oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

30. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

31. Dowód jest prostą konsekwencją nierówności $n_k \geqslant k$ dla $k \in \mathbb{N}$, gdzie $\{n_k\}$ jest dowolnym ciągiem ściśle rosnącym o wyrazach będących liczbami naturalnymi.

32. **a), c), d)** — rozbieżne; **b)** — zbieżny.
Pokażemy np. rozbieżność ciągu $\{c_n\}$. Biorąc podciąg o wyrazach nieparzystych otrzymujemy:

$$c_{2n-1} = 1 + \frac{2n-1}{2n}\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \to 1.$$

Teraz dla podciągu $\{c_{4n}\}$ mamy:

$$c_{4n} = 1 + \frac{4n}{4n+1}\cos 2\pi n = 1 + \frac{4n}{4n+1} \to 2.$$

Stąd i z zad. 31 wynika, że $\{c_n\}$ nie ma granicy w $\overline{\mathbb{R}}$.

33. **a)** $-\frac{1}{2}$, **b)** 3, **c)** $\frac{\pi}{2}$, **d)** $\frac{1}{3}$, **e)** $-\frac{1}{3}$, **f)** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-1$, **g)** 2.

34. Załóżmy najpierw, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a\in\mathbb{R}$. Jeżeli $\{a_n\}$ jest stały, to a jest największym i najmniejszym wyrazem ciągu. Jeśli $\{a_n\}$ nie jest stały, to istnieje takie $\varepsilon > 0$, że poza przedziałem $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ znajdują się pewne wyrazy ciągu. Może być ich tylko skończona ilość (z definicji granicy), więc wśród nich znajdują się najmniejszy i największy. Jeżeli najmniejszy jest mniejszy lub równy $a-\varepsilon$, to jest on najmniejszym wyrazem ciągu. Jeżeli nie, to największy z wyrazów ciągu leżący poza przedziałem $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ jest większy od $a+\varepsilon$ i jest on największym wyrazem ciągu.

Przypadek, gdy $a = \infty$ lub $a = -\infty$ pozostawiamy Czytelnikowi.

35. Niech A oznacza zbiór punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$. Jest on niepusty (twierdzenie Bolzano-Weierstrassa) i ograniczony (dlaczego?). Niech $m = \inf A$, $M = \sup A$. Pokażemy np., że $m\in A$.

W tym celu ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $x\in A$ taki, że $m \leqslant x \leqslant m+\frac{\varepsilon}{2}$. Z definicji punktu skupienia znajdujemy wyraz ciągu a_k taki, że $a_k\in\left(x-\frac{\varepsilon}{2},\ x+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Ale wtedy $m-\varepsilon < a_k < m+\varepsilon$. Oznacza to, że w każdym otoczeniu m znajduje się przynajmniej jeden wyraz ciągu $\{a_n\}$, a więc m jest punktem skupienia tego ciągu. Koniec dowodu.

36. Wystarczy oczywiście pokazać, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma dokładnie jeden punkt skupienia a, to $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy poza ustalonym otoczeniem np. $(a-1, a+1)$ (lub przedziałem postaci $(-\infty, \alpha)$ lub (β, ∞)) znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$, a więc znajduje się pewien podciąg $\{a_{k_n}\}$. Podciąg ten ma punkt skupienia b różny od a, wbrew założeniu. Sprzeczność i koniec dowodu.

37. Pokażemy np., że $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$. Oczywiście (por. definicję z zad. 25) $a = \lim_{n\to\infty} \beta_n$, gdzie $\beta_n = \sup\{a_k : k \geqslant n\}$. Przypomnijmy też, że $\{\beta_n\}$ jest ciągiem malejącym.

Ustalmy teraz $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $n_0\in\mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ zachodzi $a \leqslant \beta_n < a+\varepsilon$. Ustalmy dowolnie $n \geqslant n_0$, i znajdźmy $k_n (k_n \geqslant n)$ takie, że $\beta_n-\varepsilon \leqslant a_{k_n} \leqslant \beta_n$.

Ostatecznie mamy, że $a-\varepsilon \leqslant a_{k_n} < a+\varepsilon$. A to już oznacza, że a jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$.

38. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi. Radzimy odwołać się do rozwiązania zad. 37 i poprowadzić dowód nie wprost.

39. Twierdzenie to jest prostą konsekwencją twierdzeń z zad. 36 i z zad. 38.

40. **a)** $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$.

b) Ponieważ $b_{4n-3} = 6$, $b_{4n-2} = -4$, $b_{4n-1} = 0$, $b_{4n} = 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, więc $\liminf_{n\to\infty} b_n = -4$, $\limsup_{n\to\infty} b_n = 6$.

c) $\liminf_{n\to\infty} c_n = -\frac{1}{2}$, $\limsup_{n\to\infty} c_n = 1$.

d) Rozpatrując osiem podciągów $\{d_{8n-i}\}$ $(i = 0, 1, \ldots, 7)$ otrzymujemy, że $\liminf_{n\to\infty} d_n = -e-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\limsup_{n\to\infty} d_n = e+1$.

e) $\liminf_{n\to\infty} e_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} e_n = 1$

41. Podamy dla przykładu dowód nierówności w a. W tym celu ustalmy dowolne $n\in\mathbb{N}$. Powołując się na zadania 72 i 74, rozdz. IV, mamy:

$$\inf\{a_k : k \geqslant n\} + \inf\{b_k : k \geqslant n\} \leqslant \inf\{a_k + b_k : k \geqslant n\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\{a_k : k \geqslant n\} + \sup\{b_k : k \geqslant n\}.$$

Stąd (por. zad. 25) otrzymujemy żądaną nierówność.

42. Weźmy ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, gdzie $a_n = (-1)^{n(n+1)/2}\sin^2\frac{n\pi}{2}$, $b_n = (-1)^{n(n+1)/2}\cdot\cos^2\frac{n\pi}{2}$. Wtedy $a_n+b_n = (-1)^{n(n+1)/2}$ oraz $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} b_n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} b_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = -1$, $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 1$.

43. Pierwsza nierówność jest prostą konsekwencją nierówności b z zad. 41. Dowód drugiej pozostawiamy Czytelnikowi.

44. Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty} \sin n = g$. Ze wzoru $\sin 2n = 2\sin n\cdot\cos n$ mamy, że $g = \pm 2g\sqrt{1-g^2}$. Stąd $g = 0$ lub $g^2 = \frac{3}{4}$. Z drugiej strony, korzystając z zależności $\sin(n+1) = \sin n\cos 1 + \cos n\sin 1$ otrzymujemy, że

$$g = g\sin 1 \pm \sin 1\sqrt{1-g^2}.$$

Stąd $g^2 = 2\cos^2\frac{1}{2}$. Zatem $\cos^2\frac{1}{2} = 0$ lub $\cos^2\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, co jest nieprawdą.

45. Mamy, że $\sin n\pi = 0$ dla $n\in\mathbb{N}$ skąd

$$\sin\pi\sqrt{n^2+1} - \sin n\pi = 2\sin\left[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}-n)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}-n)\right] =$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\cdot\cos\left[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}-n)\right].$$

Stąd otrzymujemy, że

$$-\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leqslant \left|\sin\pi\sqrt{n^2+1}\right| \leqslant \pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1} = 0$.

46. Mamy: $a_n - b_n\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^n$, a ponieważ $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$, więc $a_n + b_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n$, $a_n - b_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-n}$. Stąd

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^{-n}\right],$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2+\sqrt{3})^{-n}\right].$$

Wobec tego

$$\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}\,\frac{(2+\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^{-n}}{(2+\sqrt{3})^n - (2+\sqrt{3})^{-n}} = \sqrt{3}\,\frac{1+(2+\sqrt{3})^{-2n}}{1-(2+\sqrt{3})^{-2n}}.$$

Ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}.$$

47. Mamy:

$$\sin^2 1 + \sin^2 2 + \ldots + \sin^2 n = \frac{1}{2}\left[(1-\cos 2) + (1-\cos 4) + \ldots + (1-\cos 2n)\right].$$

Stąd i ze wzoru z zad. 40, rozdz. I, otrzymujemy:

$$\frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \ldots + \sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos 2 + \cos 4 + \ldots + \cos 2n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)}{2\sin 1}\right)\right].$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę ograniczoność ciągu $\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)}{2\sin 1}\right\}$ otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \ldots + \sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}.$$

48. Zauważmy najpierw, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący począwszy od drugiego wyrazu wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n^2 - 2 \geqslant a_n \Leftrightarrow a_n \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$, $n = 2, 3, \ldots$

Załóżmy teraz, że $a_1 = a \in [-2, 2]$. Stąd $a^2 \in [0, 4]$, a więc $a^2 - 2 = a_2 \in [-2, 2]$. Poprzez prostą indukcję mamy, że $a_n \in [-2, 2]$ dla $n \in \mathbb{N}$, a więc $\{a_n\}$ jest ograniczony.

Zakładając, że $a > 2$ otrzymujemy $a_2 = a^2 - 2 > 2$ itd., $a_n > 2$. Ponieważ $\{a_n\}$ jest rosnący, więc gdyby był ograniczony — byłby zbieżny do granicy równej 2 (dlaczego?), co jest niemożliwe. Zatem $\{a_n\}$ jest nieograniczony dla $a > 2$.

Niech teraz $a < -2$. Wtedy $a^2 > 4$ i dalej $a_2 > 2$. Poprzez indukcję otrzymujemy, że $a_n > 2$ dla $n = 2, 3, \ldots$ Ponieważ $\{a_n\}$ jest rosnący, więc gdyby był ograniczony — byłby zbieżny do 2, co jest niemożliwe.

Ostatecznie mamy, że $\{a_n\}$ jest ograniczony $\Leftrightarrow |a| \leqslant 2$.

49. Oznaczmy $x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}$. Mamy:

$$x_n - \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Dalej

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

Zatem (por. zad. 14)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 + 2 = 3.$$

50. Oznaczmy $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n = 1, 2, \ldots$

Mamy:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Stąd, przy $n \to \infty$ otrzymujemy

$$e \geqslant y_k,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Przy $k = n$ otrzymujemy stąd

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e.$$

Z drugiej strony

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Zatem $x_n < y_n < e$ i z twierdzenia o trzech ciągach mamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

51. Przy oznaczeniach z rozwiązania zad. 50 mamy:

$$y_{m+n} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n \cdot n!},$$

przy ustalonym m i n. Stąd, przy $m \to \infty$

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Oznaczmy $\theta = \dfrac{e - y_n}{\dfrac{1}{n \cdot n!}}$. Oczywiście $0 < \theta < 1$. Zatem

$$e = y_n + \frac{\theta}{n \cdot n!}.$$

52. Korzystamy z nierówności (por. rozwiązanie zad. 19):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Logarytmując tę nierówność, otrzymujemy

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Stąd już łatwo wynika żądana nierówność.

53. Logarytmując ciąg $\{x_n\}$ i korzystając z nierówności w zad. 52 mamy:

$$\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Stąd $x_n \leqslant e$. Zatem $\{x_n\}$ jest ograniczony z góry. Ponieważ wyrazy naszego ciągu są dodatnie, więc

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1+\frac{1}{2^{n+1}} > 1 \Rightarrow \{x_n\} \text{ jest ściśle rosnący.}$$

Ostatecznie istnieje skończona $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

54. Oznaczmy $x_n = \sqrt[n]{a}-1$. Stąd $n = \dfrac{\ln a}{\ln(1+x_n)}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dalej:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a}{\ln(1+x_n)} x_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln a \frac{1}{\ln(1+x_n)^{1/x_n}} = \ln a.$$

55. Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0 \text{ (por. zad. 52),}$$

a więc ciąg $\{x_n\}$ jest malejący. Ponadto (jeszcze raz nierówność z zad. 52):

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n > \ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+$$

$$+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n = \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) - \ln n =$$

$$= \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0.$$

Stąd ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony z dołu. Koniec dowodu.

56. Oznaczmy: $a_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem z poprzedniego zadania. Mamy:

$$x_{2n}-x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} - \ln(2n) -$$

$$-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}+\ln n = \frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} - \ln 2 = a_n - \ln 2.$$

Stąd $a_n = \ln 2 + x_{2n} - x_n$, więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2+\gamma-\gamma = \ln 2.$$

57. Przekształcając, otrzymujemy:

$$a_n = \frac{e^{\ln n}}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}} = e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}.$$

Stąd na podstawie zad. 55 mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\gamma}.$$

58. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

59. a) Mamy:

$$1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}.$$

Zatem

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\ldots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=\frac{1}{3}\,\frac{n+2}{n}\to\frac{1}{3}.$$

b) $\dfrac{2}{3}$.

60. e^x.

61. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\left[n\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}-1\right)\right]\right)^n.$$

Oznaczmy $x_n = n\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}-1\right)$. Mamy:

$$x_n=\frac{1}{m}[n(\sqrt[n]{a_1}-1)+n(\sqrt[n]{a_2}-1)+\ldots+n(\sqrt[n]{a_m}-1)].$$

Stąd na podstawie zad. 54 otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_m)=\ln\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m}.$$

Dalej mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n}=e^{\ln\sqrt[m]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m}}=$$

$$=\sqrt[m]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m}.$$

62. Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny, to jego granica g spełnia równanie $g = g(2-yg)$, skąd $g = 0$ lub $g = \frac{1}{y}$.

Teraz, niech $\{d_n\}$ będzie takim ciągiem, że $x_n = \frac{1}{y}(1-d_n)$. Wtedy $x_{n+1} = \frac{1}{y}(1-d_n)\left[2-y\cdot\frac{1}{y}(1-d_n)\right] = \frac{1}{y}(1-d_n)(1+d_n) = \frac{1}{y}(1-d_n^2)$. Zatem $d_{n+1} = d_n^2$. Stąd wnioskujemy, że ciąg wyjściowy $\{x_n\}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $\{d_n\}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $-1 \leqslant d_1 \leqslant 1$. Stąd wynika warunek na a: $-1 \leqslant 1-ay \leqslant 1$. Zatem $0 \leqslant a \leqslant \frac{2}{y}$. Jeżeli $a = 0$ lub $a = \frac{2}{y}$, to $x_n \to 0$. W pozostałych przypadkach $x_n \to \frac{1}{y}$.

63. Mamy:

$$x_k - x_{k-1} = \frac{x_{k-1}+x_{k-2}}{2} - x_{k-1} = -\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{2}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= b-a,\\
x_3 - x_2 &= -\frac{x_2-x_1}{2} = -\frac{b-a}{2},\\
x_4 - x_3 &= -\frac{x_3-x_2}{2} = \frac{b-a}{4},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n - x_{n-1} &= (-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}},
\end{aligned}$$

dla $n = 3, 4, \ldots$

Teraz, uwzględniając, że

$$x_n = x_1 + (x_2-x_1) + (x_3-x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}),$$

otrzymujemy

$$x_n = a + (b-a) - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}} =$$

$$= a + \frac{2(b-a)}{2} + \frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[a + \frac{2(b-a)}{2} + \frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\right] = \frac{a+2b}{3}.$$

64. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n\to\infty}\sin^2[(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)+n\pi] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)] = \lim_{n\to\infty} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = 1.$$

Zauważmy, że w powyższych rachunkach skorzystaliśmy z faktu, że funkcje $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = x^2$ są ciągłe, a także z twierdzenia mówiącego, że złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

65. Na podstawie faktu z zad. 51 mamy

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}\ (0<\theta_n<1),$$

przy czym (por. rozwiązanie zad. 50 i 51)

$$\theta_n = \frac{e-y_n}{\frac{1}{n\cdot n!}} = nn!(e-y_n) = nn!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}-y_n\right) = nn!\left[\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right] =$$

$$= \frac{n}{n+1}+\frac{n\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \to 1 \quad \text{przy} \quad n\to\infty.$$

Korzystając z tego, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = \lim_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi n!\,y_n+\frac{2\pi\theta_n}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi\theta_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}}{\frac{2\pi\theta_n}{n}}\cdot 2\pi\theta_n = 2\pi.$$

66. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.

67. Metodą indukcji matematycznej pokazujemy łatwo, że $\{x_n\}$ jest ograniczony z góry przez liczbę 2. Rzeczywiście, $x_1 \leqslant 2$. Ustalmy dowolnie $n\in\mathbb{N}$ i załóżmy, że $x_n \leqslant 2$. Wtedy $2+x_n \leqslant 4$, skąd $\sqrt{2+x_n} = x_{n+1} \leqslant 2$. Nietrudno też pokazać (co pozostawiamy jako samodzielne ćwiczenie), że $\{x_n\}$ jest rosnący. Stąd x_n jest zbieżny do pewnej granicy skończonej x. Z równości (przechodząc do granicy) $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ otrzymujemy, że $x = \sqrt{2+x}$, skąd $x = 2$.

68. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. *Wskazówka*: Pokazać, że $\{x_n\}$ jest ograniczony z dołu przez liczbę 1 i malejący (po odrzuceniu pierwszego wyrazu).

69. Niech W_n będzie 2^{n+1} — kątem foremnym opisanym na kole o promieniu jednostkowym i niech a_n oznacza połowę długości boku tego wielokąta.

Wówczas $a_n = \operatorname{tg}\varphi_n$, gdzie $\varphi_n = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. Zatem $\varphi_n = 2\varphi_{n+1}$, skąd $a_n = \dfrac{2a_{n+1}}{1-a_{n+1}^2}$ i w konsekwencji $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+a_n^2}-1}{a_n}$. Otrzymana formuła jest identyczna z tą, która definiuje ciąg $\{x_n\}$. Ponadto, $a_1 = 1$, bowiem W_1 jest kwadratem o boku 2. Wobec tego $x_n = a_n$ dla wszystkich n. Długość obwodu W_n wynosi $2^{n+1}\cdot 2a_n$ i dąży do 2π, przy $n\to\infty$. Stąd też $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n x_n = \dfrac{\pi}{2}$.

70. Pozostawiamy to zadanie do samodzielnego przerobienia przez Czytelnika.

71. Rozpatrzmy różnicę między x_n a pierwiastkami równania $x = \dfrac{1}{1+x}$. Mamy:

$$x-x_2 = \frac{x_1-x}{(1+x)(1+x_1)},$$

$$x-x_3 = -\frac{x_1-x}{(1+x)^2(1+x_1)(1+x_2)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x-x_n = \frac{(-1)^{n-1}(x_1-x)}{(1+x)^n(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{n-1})}.$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić, $0 < x_n < 1$, więc

$$|x-x_n| \leqslant \frac{|x_1-x|}{|x+1|^n}.$$

Pierwiastkami równania $x = \dfrac{1}{1+x}$ są liczby $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$, więc $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Stąd

$$\left|x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \leqslant \frac{1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n} \to 0, \text{ przy } n\to\infty.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

72. Jeżeli $x_1 \leqslant 0$, to $x_2 = 1-x_1 \geqslant 1$. Gdy zaś $x_1 \geqslant 2$, wówczas $x_2 = x_1-1 \geqslant 1$. W obu tych przypadkach mamy (sprawdzić przez indukcję) zależność:

$$x_n \geqslant 2\cdot 2^{-n}, \quad x_{n+1} = x_n - 2^{-n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Stąd

$$x_n = x_2 + \sum_{k=2}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) = x_2 - \sum_{k=2}^{n-1} 2^{-k}.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_2 - 1 = \begin{cases} -x_1 & \text{dla} \quad x_1 \leqslant 0, \\ x_1 - 2 & \text{dla} \quad x_1 \geqslant 2. \end{cases}$$

Natomiast gdy $x_1 \in [0, 2]$, to za pomocą indukcji pokazuje się, że

$$0 \leqslant x_n \leqslant 2\cdot 2^{-n+1} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, o ile $0 \leqslant x_1 \leqslant 2$.

Możemy otrzymane wyniki zapisać jednym wzorem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{|x_1| + |x_1 - 2|}{2} - 1.$$

73. Zauważmy najpierw, że $x_n > \frac{1}{e}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Istotnie, jeżeli $x_n > \frac{1}{e}$ dla ustalonej dowolnie liczby naturalnej n, to $x_{n+1} \geqslant$ $\geqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{1-1/n} - \frac{1}{ne} = \frac{1}{e}\left(e^{1/n} - \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{e}$. Pokażemy teraz, że ciąg $\{x_n\}$ jest malejący.

Rzeczywiście, $x_1 > x_2$. Załóżmy, że $x_{n-1} > x_n$. Wtedy, korzystając z nierówności $\left(1+\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$, $a > 0$, (por. zad. 19) i podstawiając w niej $a = (ex_n)^{-1}$, a następnie mnożąc obie strony przez x_n^2, otrzymamy

$$L = x_n(x_n + ((n-1)e)^{-1})^{n-1} < (x_n + (ne)^{-1})^n = P.$$

Gdyby $x_n \leqslant x_{n+1}$, to zgodnie z określeniem ciągu $\{x_n\}$ byłoby $P \leqslant (x_{n+1} + (ne)^{-1})^n = x_n^{n-1}$ oraz $L = x_n x_{n-1}^{n-2} > x_n x_n^{n-2} = x_n^{n-1}$ i sprzeczność. Zatem $x_n > x_{n+1}$.

Łącznie dowodzi to, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny (do granicy właściwej). Oczywiście $s = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \frac{1}{e}$. Oznaczmy $y_n = x_n^n$. Mamy

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n}\left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^n,$$

gdzie $t_n = nex_n^{1-1/n}$. Ponieważ $t_n \to \infty$ przy $n \to \infty$ oraz $\frac{t_n}{n} \to es$, więc

$$\left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^n = \left(\left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right)^{n/t_n} \to \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{es}}.$$

Zatem

$$s = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{es}}.$$

Można pokazać, że funkcja $x \to x^x$ osiąga minimum w punkcie $\frac{1}{e}$. Zatem, $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{e}$.

74. Korzystamy tutaj z faktów ustalonych w zad. 19, 50 i 51.

Przypuśćmy, że e jest liczbą wymierną. Wtedy $e = \frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$. Z drugiej strony

$$e = \frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!},\quad 0 < \theta_n < 1.$$

Mnożąc obie strony przez $n!$ mamy:

$$m(n-1)! - n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{\theta_n}{n}.$$

Ponieważ po lewej stronie mamy liczbę całkowitą, po prawej zaś ułamek właściwy, więc otrzymujemy oczywistą sprzeczność. Koniec dowodu.

75. Załóżmy najpierw, że g jest liczbą skończoną. Wtedy, dla zadanego $\varepsilon > 0$ istnieje k takie, że dla $n > k$ zachodzi $g-\varepsilon < a_{k+1} < g+\varepsilon$, $g-\varepsilon < a_{k+2} < g+\varepsilon, \ldots, g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon$. Stąd (dodanie stronami)

$$g-\varepsilon < \frac{a_{k+1} + \ldots + a_n}{n-k} < g+\varepsilon$$

czyli

$$(g-\varepsilon)\frac{n-k}{n} < \frac{a_{k+1} + \ldots + a_n}{n} < (g+\varepsilon)\frac{n-k}{n}$$

Stąd, ponieważ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_k}{n} = 0$, otrzymujemy

$$-\varepsilon < \frac{a_1 + \ldots + a_k}{n} < \varepsilon$$

dla n odpowiednio dużych. Dalej

$$(g-\varepsilon)\frac{n-k}{n} - \varepsilon < \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} < (g+\varepsilon)\frac{n-k}{n} + \varepsilon.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \frac{n-k}{n} = 1$, więc dla n odpowiednio dużych mamy

$$g - 3\varepsilon < \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} < g + 3\varepsilon.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = g.$$

Dowody w przypadku $g = \infty$ *i* $g = -\infty$ pozostawiamy Czytelnikowi.

76. Wskazówka: Zlogarytmować obustronnie ciąg $x_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ i skorzystać z poprzedniego zadania.

77. Czytelnik sam wskaże odpowiednie przykłady.

78. Podstawmy $b_1 = a_1$ oraz $b_n = a_n - a_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Ponadto $\dfrac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} = \dfrac{a_n}{n}$. Stąd na podstawie zad. 75 mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1+\ldots+b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g.$$

79. Wskazówka: W twierdzeniu z zad. 76 podstawić:

$$b_1 = a_1,\ b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2.$$

80. Oznaczmy $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Wtedy $\sqrt[n]{x_n} = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e,$$

więc z zad. 79 mamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = e$.

81. Zauważmy najpierw, że ciąg $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ jest ograniczony, bowiem z założenia mamy

$$a_2 \leqslant a_1^2,\ a_3 \leqslant a_3 a_1 \leqslant a_1^3 \text{ i ogólnie } a_n \leqslant a_1^n,$$

skąd $0 < \sqrt[n]{a_n} \leqslant a_1$. Podstawmy teraz

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},\ \beta = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Oczywiście $\alpha \leqslant \beta$ (por. zad. 26). Wystarczy pokazać, że $\beta \leqslant \alpha$. W tym celu ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i weźmy $\gamma = \alpha + \varepsilon$. W ciągu $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ istnieje wyraz mniejszy od γ (por. zad. 37). Niech będzie to $\sqrt[m]{a_m}$. Każdą liczbę naturalną n większą od m można zapisać w postaci $n = km + r$, gdzie k jest liczbą naturalną oraz $0 \leqslant r < m$, $r \in \mathbb{N}$. Z założenia $a_{m+r} \leqslant a_m \cdot a_r$, $a_{2m} a_r \leqslant a_m^2 a_r$ i ogólnie $a_n = a_{km+r} \leqslant a_m^k a_r$ (gdy $r = 0$ należy przyjąć $a_r = 1$). Stąd

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant (\sqrt[m]{a_m})^{\frac{km}{n}} \cdot a_r^{1/n} < \gamma^{\frac{km}{n}} \cdot a_r^{1/n}.$$

Gdy $n \to \infty$, to $\frac{km}{n} \to 1$. Prawa strona powyższej nierówności zmierza więc do γ, a zatem

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \beta \leqslant \gamma.$$

Stąd (dowolność ε) $\beta \leqslant \alpha$. Koniec dowodu.

82. Wskazówka: Zlogarytmować nierówność z zad. 81.

83. Z warunków zadania wynika, że $x_n \geqslant 0$ i $y_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Korzystając z nierówności z zad. 54, rozdz. I, otrzymujemy

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geqslant \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}.$$

Z drugiej strony $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant \sqrt{x_n^2} = x_n$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant y_n$. Stąd $x_n \leqslant y_n \leqslant y_1$, $y_n \geqslant x_n \geqslant x_1$, zatem ciąg $\{x_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry, a $\{y_n\}$ malejący i ograniczony z dołu. Zatem istnieją skończone granice: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ oraz $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Przechodząc w równości $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ do granicy otrzymujemy $x = y$. Zatem $\mu(a, b) = x = y$.

84. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd oczywiście wnioskujemy o istnieniu liczby $M > 0$ takiej, że $|x_n| \leqslant M$ oraz $|x_n - a| \leqslant 2M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z warunku, że $\lim_{n\to\infty} p_{nm} = 0$ wynika istnienie takiego $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 = n_1(\varepsilon)$, że $p_{nm} < \frac{\varepsilon}{4n_0 M}$ dla $m = 1, 2, \ldots, n_0$ i dla $n > n_1$. Dalej mamy, korzystając z przyjętych założeń:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{m=1}^{n} p_{nm} x_m - a\right| = \left|\sum_{m=1}^{n} p_{nm} x_m - \sum_{m=1}^{n} p_{nm} a\right| = \left|\sum_{m=1}^{n} p_{nm}(x_m - a)\right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{n} p_{nm} |x_m - a| = p_{n1}|x_1 - a| + p_{n2}|x_2 - a| + \ldots + \\
&+ p_{n_0}|x_{n_0} - a| + p_{n,n_0+1}|x_{n_0+1} - a| + \ldots + p_{nm}|x_n - a| \leqslant \\
&\leqslant n_0 \frac{\varepsilon}{4n_0 M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2}(p_{n,n_0+1} + \ldots + p_{nm}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

dla $n \geqslant n_1$. Zatem $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} p_{nm} x_m = a$.

85. Oznaczmy $a = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$. Załóżmy najpierw, że $a \in \mathbb{R}$. Wtedy przyjmując $x_0 = y_0 = 0$ oraz $p_{nm} = \frac{y_m - y_{m-1}}{y_n}$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, $x_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sprawdzamy łatwo, że są spełnione założenia twierdzenia Teoplitza (zad. 84), gdzie $t_n = \frac{x_n}{y_n}$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a.$$

Jeżeli $a = \infty$, to powtarzamy poprzednie rozumowanie dla $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ sprawdzając najpierw, że $x_{n+1} > x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

86. Pokażemy np. równość z b pozostawiając dwie pozostałe do samodzielnego udowodnienia.

Podstawmy (w twierdzeniu Stolza, zad. 85): $x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \ldots + n^p) - n^{p+1}$, $y_n = (p+1)n^p$. Wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(n+1)^p - (n+1)^{p+1} + n^{p+1}}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(p+1)\left[n^p + pn^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} n^{p-2} + \ldots + 1\right]}{(p+1)\left[n^p + pn^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} n^{p-2} + \ldots + 1 - n^p\right]} + \right.$$

$$\left. + \frac{-n^{p+1} - (p+1)n^p - \frac{(p+1)p}{2} n^{p-1} - \ldots - 1 + n^{p+1}}{(p+1)\left[n^p + pn^{p-1} + \ldots + \frac{p(p-1)}{2} n^{p-2} + \ldots + 1 - n^p\right]} \right\}.$$

Zbierzmy teraz współczynniki przy jednakowych potęgach n. Dzieląc licznik i mianownik przez n^{p-1} i oznaczając przez z_n sumę składników o stopniach nie większych od -1, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p(p+1)}{2} + z_n}{p(p+1) + z_n} = \frac{1}{2}.$$

Stąd i z twierdzenia Stolza wynika, że granica naszego ciągu też jest równa $\frac{1}{2}$.

ROZDZIAŁ VII

GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

1. -10. **2.** 0. **3.** 12.

4. $\frac{5}{3}$. **5.** 1. **6.** 5.

7. 1. **8.** $\frac{1}{3}$. **9.** $\frac{2}{3}$.

10. Granica nie istnieje, ponieważ granica lewostronna i prawostronna są różne.

Wskazówka: Skorzystać z równości $x^3-3x^2+4=(x-2)^2(x+1)$.

11. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **12.** $-\frac{1}{6}$. **13.** $\frac{1}{2}$.

14. 1. **15.** 1. **16.** $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

17. $-\sqrt{2}$. **18.** Granica nie istnieje.

19. $\frac{q^2-p^2}{2}$. **20.** $\frac{1}{2}$. **21.** 1. **22.** 0.

23. $\frac{2}{\pi}$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** 0. **26.** 1.

27. $-\frac{1}{4}$. **28.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **29.** $-\frac{1}{2}$. **30.** e.

31. $e^{-4/3}$. **32.** 1. **33.** 1.

34. Nie istnieje. Aby to udowodnić wystarczy wziąć dwa ciągi: $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}$, $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$.

35. 0.

36. 0. Aby to udowodnić wystarczy napisać $\frac{x^2y}{x^2+y^2} = x\frac{xy}{x^2+y^2}$ i zauważyć, że

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

37. Granica nie istnieje.

Wskazówka: Wziąć dwa ciągi: $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}, \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$.

38. 2.

39. Korzystając z nierówności $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$ oraz $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, otrzymujemy:

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} = |x+y|\frac{|x^2+y^2-xy|}{x^2+y^2} \leqslant$$

$$\leqslant |x+y|\left(1+\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right) \leqslant \frac{3}{2}|x+y|.$$

Stąd już łatwo otrzymujemy, że $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0.$

40. Granica jest równa 0 (por. rozwiązanie zad. 36).

41. Wykorzystując współrzędne biegunowe, podstawmy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Wtedy warunek $(x, y) \to (0, 0)$ implikuje, że $r \to 0$. Mamy więc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}.$$

Nietrudno sprawdzić, że $\lim\limits_{r\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4} = 0$ (wystarczy w tym celu przyjąć $\frac{1}{r^2} = y$). Z drugiej strony $\sin^4\varphi+\cos^4\varphi = \frac{3+\cos 4\varphi}{4}$. Wychodząc z nierówności $-1 \leqslant \cos 4\varphi \leqslant 1$ otrzymujemy, że $\frac{1}{2} \leqslant \sin^4\varphi+\cos^4\varphi \leqslant 1$.

Stąd $\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} \leqslant 2$. Zatem

$$0 \leqslant \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} \leqslant 2\frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}.$$

Stąd otrzymujemy, że poszukiwana granica jest równa 0.

42. a) $\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$; f nie jest ciągła w $x=0$,

b) $\lim_{x\to 1-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$; f nie jest ciągła w $x=1$,

c) $\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty$; f nie jest ciągła w $x=2$,

d) $\lim_{x\to 1-} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$; więc f nie jest ciągła w $x=1$,

e) żadna z granic jednostronnych w punkcie $x=0$ nie istnieje,

f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = -2$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x) = -2$; f nie jest ciągła w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$.

Wskazówka: Skorzystać ze wzoru $\cos x - \sin x = -\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

43. a) f jest ciągła,
b) g jest nieciągła tylko w punkcie $x=-1$,
c) h jest wszędzie ciągła.

44. Wskazówka: Wystarczy sprawdzić, że granica funkcji $f(x, y)$ w punkcie $(0, 0)$ nie istnieje.

45. Wskazówka: Pokazać, że

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x\in(-1, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad x=1 \\ 0 & \text{dla} \quad x>1. \end{cases}$$

46. Porównaj zad. 36. **47.** Porównaj zad. 37.

49. Ciągłość w punkcie $x=0$ wynika stąd, że $|g(x)| \leqslant |x|$, dla $x\in\mathbb{R}$.

50. $a=\frac{1}{2}$. **51.** $a=2$. **52.** $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=1$.

53. Przykładem takiej funkcji jest $f(x)=[x]$, $x\in\mathbb{R}$ (część całkowita liczby x).

54. a) Z nierówności $\frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}$ mamy, że $1-x \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$. Stąd wynika, że granica jest równa 1,

b) mnożąc licznik i mianownik naszej funkcji przez $1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}$ otrzymujemy:

$$\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x\cos 2x}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} =$$

$$= \frac{1-2\cos^4 x+\cos^2 x}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} =$$

$$= \frac{-2(\cos^2 x - 1)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\right)}{x^2(1 + \cos x\sqrt{\cos 2x})} = 2\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{\cos^2 x + \frac{1}{2}}{1 + \cos x\sqrt{\cos 2x}}.$$

Stąd otrzymujemy, że poszukiwana granica jest równa $\frac{3}{2}$,

c) przekształcając

$$1 - \cos(1 - \cos x) = 1 - \cos\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

łatwo już otrzymujemy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \frac{1}{8},$$

d) granica nie istnieje, ponieważ granice jednostronne w punkcie $x = 0$ są różne,

e) 1, **f)** $-\frac{1}{2}$, **g)** $\frac{1}{10\ln 10}$, **h)** 1.

55. $\frac{\sin x}{x}$.

Wskazówka: Pomnożyć i podzielić rozważane wyrażenie przez $\sin\frac{x}{2^n}$.

56. a) Wskazówka:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \\ -1 & \text{dla} \quad x < 0, \end{cases}$$

b) ciągła wszędzie poza punktami $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

c) jeżeli x_0 jest liczbą całkowitą, $x_0 = k$, to

$$|f(x_0) - f(x)| = |f(x)| \leqslant |\sin \pi x| = |\sin[k\pi + \pi(x - k)]| =$$
$$= |\cos k\pi \cdot \sin \pi(x - k)| = |\sin \pi(x - x_0)| \leqslant \pi|x - x_0|,$$

a więc f jest ciągła w punktach o współrzędnych całkowitych.

Z drugiej strony, jeżeli $x_0 \notin \mathbb{Z}$, to biorąc ciąg $\{x_n\}$ liczb wymiernych zbieżny do x_0 oraz ciąg $\{y_n\}$ liczb niewymiernych zbieżny do x_0, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sin \pi x_n = \sin \pi x_0 \neq 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sin \pi y_n = 0.$$

Zatem f nie jest ciągła w x_0.

57. Weźmy dowolną liczbę wymierną x_0, $x_0 = \frac{p}{q}$. Wtedy $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Z drugiej strony $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{pn+1}{qn} = x_0$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{pn+1}{qn}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{qn} = 0 \neq f(x_0)$. Zatem f jest nieciągła w x_0.

Niech teraz x_0 będzie liczbą niewymierną. Weźmy ciąg $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ liczb wymiernych zbieżny do x_0. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x_0),$$

a więc f jest ciągła w x_0.

58. Wskazówka: Skorzystać z własności Darboux oraz z faktu, że $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) = -\infty$.

59. a) Podstawiając $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (por. rozwiązanie zad. 41), otrzymujemy

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\,\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{1-\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Z drugiej strony $\frac{1}{2} \leqslant 1-\sin\varphi\cos\varphi \leqslant \frac{3}{2}$ (sprawdzić!). Stąd

$$\left|\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{1-\sin\varphi\cos\varphi}\right| \leqslant 4.$$

Ostatecznie

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\,\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{1-\sin\varphi\cos\varphi} = 0,$$

b) granica nie istnieje,

c) granica nie istnieje (wystarczy wziąć dwa ciągi $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$, $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}$),

d) granica nie istnieje.

60. a) oraz **b)** — funkcje są ciągłe na $\mathbb{R}^2$,

c) f jest ciągła wszędzie poza punktem (0, 0). Podobnie funkcja w d.

61. Ponieważ $\lim\limits_{x\to0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to0} f(x,y) = 0$, więc obie granice iterowane są równe 0. Z drugiej strony, biorąc dwa ciągi $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$, $\left\{\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right\}$ łatwo pokazać, że granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ nie istnieje.}$$

62. Istnienie granicy wynika z faktu, że funkcje $\sin\frac{1}{x}$ oraz $\sin\frac{1}{y}$ są ograniczone. To, że wskazane w zadaniu granice iterowane nie istnieją, jest konsekwencją faktu, że nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. Czytelnik uzupełni szczegóły.

63. Wystarczy sprawdzić, czy funkcja f jest ciągła w punktach o współrzędnych całkowitych. Ciągłość w pozostałych punktach jest oczywista. Ustalmy więc liczbę całkowitą k i niech $k-\frac{1}{2} < x < k+\frac{1}{2}$. Wtedy

$$-|k-1|\,|\sin\pi x| \leqslant -|[x]\sin\pi x| \leqslant [x]\sin\pi x \leqslant$$
$$\leqslant |[x]\sin\pi x| \leqslant |k|\,|\sin\pi x|.$$

Ponieważ

$$\lim_{x\to k}(-|k-1|\,|\sin\pi x|) = \lim_{x\to k}|k|\cdot|\sin\pi x| = 0,$$

więc

$$\lim_{x\to k}[x]\sin\pi x = 0.$$

Zatem f jest ciągła w k.

64. Wskazówka: Porównaj zad. 15, rozdz. III.

65. To, że $\bar{f}$ jest rosnąca na I jest oczywiste. Weźmy teraz $\varepsilon > 0$ i ustalmy dowolnie $x, y\in I$, $x < y$, $y-x \leqslant \varepsilon$. Mamy:

$$|\bar{f}(y)-\bar{f}(x)| \leqslant \bar{f}(y)-\bar{f}(x).$$

Z faktu, że f jest ciągła wynika, że istnieje $t_0\in I$, $t_0 \leqslant y$ takie, że $\bar{f}(y) = f(t_0)$. Ponadto, $t_0 \geqslant x$ (dlaczego?). Zatem

$$|\bar{f}(y)-\bar{f}(x)| \leqslant |f(t_0)-f(x)|.$$

Ponieważ $t_0-x \leqslant y-x$, więc ciągłość funkcji $\bar{f}$ jest konsekwencją ciągłości funkcji f.

66. Przypuśćmy, że istnieje liczba $c\in\mathbb{R}$ taka, że $f(x) = c$ tylko w skończonej ilości liczb $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\alpha \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Wtedy na przedziale $(x_n, +\infty)$ funkcja f przyjmuje wartości mniejsze albo większe od c (własność Darboux). Załóżmy np., że $f(x) > c$ dla $x > x_n$. Oznacza to, że na przedziale $(x_n, +\infty)$ f jest ograniczona z dołu. Ponieważ f jest ograniczona na przedziale $[\alpha, x_n]$ (bo jest ciągła), więc stąd mamy, że f jest ograniczona z dołu na przedziale $[\alpha, +\infty)$. Sprzeczność.

67. Załóżmy, że f jest jednostajnie ciągła na I. Wtedy, biorąc dowolnie ustalone $\alpha > 0$ znajdziemy $\beta > 0$ takie, że $|f(x)-f(y)| \leqslant \alpha$ dla dowolnych $x, y\in I$

takich, że $|x-y| \leqslant \beta$. Stąd otrzymujemy, że $\omega(f, \varepsilon) \leqslant \alpha$ dla wszystkich $\varepsilon \leqslant \beta$. W konsekwencji $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \omega(f, \varepsilon) = 0$.

Równie prosty dowód implikacji odwrotnej pozostawiamy Czytelnikowi.

68. Podstawmy $a = \omega(f, 1)$, gdzie funkcja ω jest określona w poprzednim zadaniu.

Teraz, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ weźmy liczbę naturalną n, $n = [|x|]+1$. Wtedy $\frac{|x|}{n} < 1$ oraz $n \leqslant |x|+1$. Dalej mamy:

$$|f(x)| \leqslant |f(x)-f(0)|+|f(0)| \leqslant$$
$$\leqslant \left|f(x)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right|+\left|f\left(\frac{n-1}{n}x\right)-f\left(\frac{n-2}{n}x\right)\right|+ \ldots +$$
$$+\left|f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right|+|f(0)| \leqslant n\omega(f, 1)+|f(0)| \leqslant$$
$$\leqslant (|x|+1)\,\omega(f, 1)+|f(0)| = |x|\,\omega(f, 1)+[\omega(f, 1)+|f(0)|].$$

Stąd widać, że wystarczy przyjąć $b = \omega(f, 1)+|f(0)|$.

69. $|f(x)| = |x| \cdot |\sin x| \leqslant |x|$. Żeby pokazać, że f nie jest jednostajnie ciągła ustalmy $\varepsilon > 0$ (odpowiednio małe). Weźmy $x = 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest dowolnie ustalone. Mamy:

$$|f(x+\varepsilon)-f(x)| = (2\pi n+\varepsilon)\sin\varepsilon = 2\pi n\sin\varepsilon+\varepsilon\sin\varepsilon.$$

Stąd widać, że

$$\omega(f, \varepsilon) \geqslant \sup\{2\pi n\sin\varepsilon\colon n = 1, 2, \ldots\} = +\infty,$$

a więc f nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

70. W s k a z ó w k a: Pokazać, że $\omega(f, \varepsilon) \leqslant L\varepsilon$.

71. W s k a z ó w k a: Pokazać, że $\omega(f, \varepsilon) \leqslant L\varepsilon^{\alpha}$.

72. Funkcje w b i e są jednostajnie ciągłe, pozostałe zaś nie są.

73. Stosujemy dowód nie wprost. Gdyby np. skończona granica $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ nie istniała, to w otoczeniu punktu $x = a$ funkcja f nie spełniałaby warunku Cauchy'ego. Stąd już łatwo uzyskać wniosek, że f nie byłaby jednostajnie ciągła na (a, b).

Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

74. Niech $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g$, $g \in \mathbb{R}$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $m > a$ takie, że dla $x \geqslant m$ zachodzi

$$|f(x)-g| \leqslant \varepsilon/4.$$

Dalej, dla dowolnych x, $y \in [m, +\infty)$ mamy

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-g|+|g-f(y)| \leqslant \varepsilon/2.$$

Teraz, korzystając z faktu, że f jest jednostajnie ciągła na przedziale $[a, m]$ znajdujemy $\delta > 0$ takie, że $x, y \in [a, m]$, $|x-y| \leqslant \delta$ implikuje, że $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon/2$.

W końcu, jeżeli $x, y \in [a, +\infty)$ są takie, że $x < m$, $y > m$ oraz $|x-y| \leqslant \delta$, to już łatwo pokazać, że $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. Koniec dowodu.

75. Ustalmy $y_0 \in Y$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Z założenia, dla ustalonego i, $1 \leqslant i \leqslant n$, istnieje δ_i takie, że dla $y \in Y$ takiego, że $d_Y(y, y_0) \leqslant \delta_i$ zachodzi $d_i(f_i(y), f_i(y_0)) \leqslant \varepsilon$.

Teraz, biorąc $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ dla $y \in Y$, $d_Y(y, y_0) \leqslant \delta$ mamy, że

$$d(f(y), f(y_0)) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(f_i(y), f_i(y_0)) \leqslant \varepsilon,$$

co kończy dowód.

76. Załóżmy, że f jest ciągła w x_0. Dla dowolnego otoczenia $\mathscr{V}_s$ znajdujemy otoczenie $\mathscr{U}$ punktu x_0 takie, że $f(\mathscr{U}) \subset \mathscr{V}_s$. Następnie dobierzmy $t \in T$ takie, że $\mathscr{U}_t \subset \mathscr{U}$. Wtedy $f(\mathscr{U}_t) \subset \mathscr{V}_s$.

Na odwrót załóżmy, że dla dowolnego $s \in S$ istnieje $t \in T$ takie, że $f(\mathscr{U}_t) \subset \mathscr{V}_s$. Niech $\mathscr{V}$ będzie otoczeniem punktu $f(x_0)$. Znajdźmy $s \in S$ takie, że $\mathscr{V}_s \subset \mathscr{V}$. Z założenia, dobierzmy $t \in T$ takie, że $f(\mathscr{U}_t) \subset \mathscr{V}_s \subset \mathscr{V}$. Ponieważ $\mathscr{U}_t$ jest otoczeniem punktu x_0, więc mamy koniec dowodu.

77. W s k a z ó w k a: Skorzystać z zad. 76 oraz zad. 84, rozdz. V.

78. Funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ dla $x > 0$ oraz $f(0) = 0$ ma żądane w zadaniu własności.

79. Załóżmy, że $\omega_f(x) = 0$. Oznacza to, że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że $|f(y_1)-f(y_2)| \leqslant \delta$ o ile $d(x, y_1) \leqslant \varepsilon_0$ oraz $d(x, y_2) \leqslant \varepsilon_0$. Stąd mamy w szczególności

$$|f(y_1)-f(x)| \leqslant \delta,$$

a to oznacza, że f jest ciągła w punkcie x.

Dowód implikacji odwrotnej pozostawiamy Czytelnikowi.

80. Niech $z \in A_\delta$, tzn. $\omega_f(z) < \delta$. Stąd istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że dla dowolnych $y_1, y_2 \in X$ i takich, że $d(z, y_1) \leqslant \varepsilon_0$, $d(z, y_2) \leqslant \varepsilon_0$ zachodzi nierówność $|f(y_1)-f(y_2)| < \delta$.

Weźmy liczbę $r = \varepsilon_0/2$. Pokażemy, że kula $K(z, r)$ zawiera się w A_δ, co będzie oznaczać, że A_δ jest zbiorem otwartym.

Istotnie, niech $y \in K(z, r)$, a więc $d(y, z) < \varepsilon_0/2$. Weźmy dowolne y_1, y_2 takie, że $d(y, y_1) \leqslant \varepsilon_0/2$, $d(y, y_2) \leqslant \varepsilon_0/2$. Wtedy z prawa trójkąta otrzymujemy, że $d(z, y_1) \leqslant \varepsilon_0$, $d(z, y_2) \leqslant \varepsilon_0$. Stąd i z faktów wcześniej ustalonych wynika, że $|f(y_1)-f(y_2)| < \delta$, a zatem $\omega_f(y) < \delta$. Koniec dowodu.

81. Zbiór tych punktów z przestrzeni X, w których funkcja f jest ciągła, można przedstawić w postaci

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in X\colon \omega_f(x)<\frac{1}{n}\right\}.$$

Stąd i z zad. 80 wynika, że zbiór ten jest typu G_δ.

82. Gdyby istniała funkcja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taka, że zbiorem jej punktów ciągłości byłby zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, to oznaczałoby to, w świetle wyniku z zad. 81, że zbiór $\mathbb{Q}$ jest typu G_δ. Jest to jednak sprzeczne z wynikiem ustalonym w zad. 111, rozdz. V.

83. Dowód równoważności warunków 1) – 5) można prowadzić według schematu 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1). Udowodnimy dwie pierwsze z wymienionych implikacji, pozostawiając Czytelnikowi dowody pozostałych.

1) $\Rightarrow$ 2)

Weźmy dowolny zbiór otwarty B, $B\subset Y$. Jeżeli $f^{-1}(B)=\emptyset$, to jest to zbiór otwarty.

Załóżmy więc, że $f^{-1}(B)\neq\emptyset$. Niech $x\in f^{-1}(B)$. Wtedy $f(x)\in B$ i B jako zbiór otwarty jest otoczeniem punktu $f(x)$. Zatem istnieje (z założenia) otoczenie $\mathcal{U}$ punktu x takie, że $f(\mathcal{U})\subset B$. Ale $\mathcal{U}\subset f^{-1}(f(\mathcal{U}))$ (por. zad. 64, rozdz. IV) oraz $f^{-1}(f(\mathcal{U}))\subset f^{-1}(B)$, więc $\mathcal{U}\subset f^{-1}(B)$. Oznacza to, że $f^{-1}(B)$ jest otwarty.

2) $\Rightarrow$ 3)

Niech C będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni Y. Wtedy $Y\setminus C$ jest zbiorem otwartym (zad. 43, rozdz. V) i wobec założenia $f^{-1}(Y\setminus C)$ jest zbiorem otwartym. Ale $f^{-1}(Y\setminus C)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(C)=X\setminus f^{-1}(C)$ (zad. 64, rozdz. IV), więc $X\setminus f^{-1}(C)$ jest otwarty, co implikuje, że $f^{-1}(C)$ jest zbiorem domkniętym.

84. Niech $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Funkcja ta jest ciągła, jeżeli przestrzenie $(0,+\infty)$ oraz $\mathbb{R}$ rozpatrujemy przy zwykłej metryce.

Zbiór $A=[1,+\infty)$ jest domknięty w $(0,+\infty)$, ale $f(A)=(0,1]$ nie jest domknięty w $\mathbb{R}$.

Z drugiej strony weźmy $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Wtedy $A=(-1,1)$ jest otwarty w $\mathbb{R}$, ale $f(A)=[0,1)$ nie jest otwarty w $\mathbb{R}$.

85. Załóżmy, że A jest zwartym podzbiorem przestrzeni X. Weźmy ciąg $\{y_n\}\subset f(A)$. Wtedy istnieje ciąg $\{x_n\}\subset A$ taki, że $f(x_n)=y_n$ dla $n=1,2,\ldots$ Ponieważ A jest zwarty, zatem z ciągu $\{x_n\}$ można wybrać podciąg $\{x_{k_n}\}$ zbieżny do elementu x, $x\in A$. Z ciągłości f wnioskujemy, że podciąg $\{y_{k_n}\}$, $y_{k_n}=f(x_{k_n})$, ciągu $\{y_n\}$ jest zbieżny do elementu $y=f(x)$. Oczywiście $y\in f(A)$.

86. W s k a z ó w k a: Pokazać, że jeśli zbiór A, $A\subset X$, ma skończoną ε-sieć w przestrzeni X, to zbiór $f(A)$ ma skończoną $\omega(f,\varepsilon)$-sieć w przestrzeni Y, gdzie moduł ciągłości funkcji f jest określony analogicznie jak w zad. 67

$$\omega(f,\varepsilon)=\sup\{d_Y(f(x),f(y))\colon x,y\in X,\ d_X(x,y)\leqslant\varepsilon\},$$

i ma analogiczną własność, jak moduł ciągłości z zad. 67.

88. Niech $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $A = \bar{A}$. Weźmy $y \in \overline{f(A)}$. Wtedy istnieje ciąg $\{y_n\} \subset f(A)$ (por. zad. 49, rozdz. V) taki, że $y_n \to y$ przy $n \to \infty$.

Znajdźmy teraz ciąg $\{x_n\} \subset A$ taki, że $f(x_n) = y_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Ponieważ $\{y_n\}$ jest relatywnie zwarty (bo jest zbieżny do y) w zbiorze $f(A)$, więc $f^{-1}(\{y_n\})$ też jest relatywnie zwarty (na mocy założenia). Ale $\{x_n\} \subset f^{-1}(\{y_n\})$ zatem $\{x_n\}$ jest relatywnie zwarty. Stąd wynika, że $\{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny do pewnego elementu $x \in X$. Bez straty ogólności możemy założyć, że sam ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x. Ponieważ $\{x_n\} \subset f^{-1}(\{y_n\}) \subset A$ oraz A jest domknięty, więc $x \in A$. Z ciągłości funkcji f wnioskujemy, że $y_n = f(x_n) \to f(x) = y$. Stąd $y = f(x) \in f(A)$, zatem $f(A)$ jest domknięty.

89. Przykładem takiej funkcji jest funkcja $f\colon \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x} & \text{dla} \quad x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest, jak łatwo sprawdzić, ciągła na przedziale $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, a więc jednostajnie ciągła na tym przedziale. Z drugiej strony, dla dowolnie ustalonego $\alpha \in (0, 1]$ mamy

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^\alpha}{\ln y} = \lim_{y \to +\infty} \alpha y^\alpha = +\infty$$

(na mocy twierdzenia de l'Hospitala). Zatem funkcja f nie spełnia warunku Höldera z żadnym wykładnikiem α, $\alpha \in (0, 1]$ oraz z żadną stałą dodatnią L.

90. W s k a z ó w k a: Skorzystać z zad. 83.

ROZDZIAŁ VIII

POCHODNE FUNKCJI. RÓŻNICZKOWALNOŚĆ

1. $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+4h}-3}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{9+4h}-3)(\sqrt{9+4h}+3)}{h(\sqrt{9+4h}+3)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9+4h-9}{h(\sqrt{9+4h}+3)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4}{\sqrt{9+4h}+3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}.$

2. $f'(0+) = 0.$

3. a) $f'(-1) = -1,$

b) $g'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{3+h}-\dfrac{1}{3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{3(3+h)\cdot h} = -\dfrac{1}{9},$

c) $h'(2) = \dfrac{3}{4}.$

4. a) $f'_a(1,1) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f((1,1)+t(2,1))-f(1,1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(1+2t,1+t)-4}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1+2t)^2+(1+2t)(1+t)+3(1+t)-1-4}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1+4t+4t^2+1+3t+2t^2+3+3t-5}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{6t^2+10t}{t} = 10,$

b) $g'_a(4,5) = 0,$ **c)** $h'_a(1,0,-1) = -5.$

5. $f'(1) = -1.$ Wskazówka: Obliczyć $f'(1+)$ i $f'(1-)$.

6. $f'(2) = -3.$

7. $f'(0-) = 1, f'(0+) = 0$, zatem $f'(0)$ nie istnieje.

8. $f'(3)$ nie istnieje.

9. $f'(x) = \dfrac{-x-1}{2x\sqrt{x}}$.

10. $f'(t) = \dfrac{1+12t}{3\sqrt[3]{t^2}} + \dfrac{9\sqrt[3]{t^2}+10t\sqrt[3]{t}+36t\sqrt[3]{t^2}}{3\sqrt[3]{t^2}}$.

11. $f'(u) = -\dfrac{6u^2}{(u^3-1)^2}$.

12. $f'(x) = \dfrac{4x^3(18-x^2)}{(9-x^2)^2}$.

13. $f'(x) = -\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$.

14. $f'(t) = \dfrac{2t^3+4t^7}{\sqrt{(1-t^4-t^8)^3}}$.

15. $f'(u) = \dfrac{1-\cos u - u\sin u}{(1-\cos u)^2}$.

16. $f'(v) = -\sin 2v$.

17. $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sin 2x\,(2-\sin x)$.

18. $f'(x) = 9\cos(3x+5)$.

19. $g'(u) = -6\cos 4u\cdot\sin 8u$.

20. $h'(x) = \dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

21. $k'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \arcsin t$.

22. $k'(x) = \arcsin x$.

23. $f'(x) = 1$.

24. $f'(u) = -\dfrac{2}{|u|\sqrt{u^2-4}}$.

25. $f'(t) = \dfrac{-2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{t}}{1+t^2}$.

26. $g'(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

27. $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

28. $g'(x) = \dfrac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$.

29. $h'(x) = \operatorname{ctg} x$.

30. $f'(u) = \dfrac{1}{u\ln 3}$.

31. $g'(u) = \dfrac{2u}{(u^2-1)\ln 5}$.

32. $h'(u) = \dfrac{u}{(2+u^2)\sqrt{1+u^2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{1+u^2}}$.

33. $f'(x) = 10^x \ln 10$.

34. $g'(x) = \dfrac{1-x\ln 4}{4^x}$.

35. $h'(x) = 8^{x^2}(1+2x^2\ln 8)$.

36. $f'(u) = \dfrac{e^u(1-u)^2}{(1+u^2)^2}$.

37. $g'(u) = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}\, e^{\sqrt{u^2+1}}$.

38. $h'(u) = \ln 3 \cos u \cdot 3^{\sin u}$.

39. $f'(x) = 10x \cosh(5x^2-1)$. **40.** $g'(x) = \dfrac{x \sinh x^2}{\sqrt{\cosh x^2}}$.

41. $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\cosh x - \sinh x}}$.

42. a) $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$,

b) $g'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$,

c) $h'(x) = \sin x^{\cos x}\, \dfrac{-\sin^2 x \ln \sin x + \cos^2 x}{\sin x}$,

d) $k'(x) = x^{x^x}\big(x^{x-1} + x^x \ln x(\ln x + 1)\big)$.

43. a) $f'(u) = -\dfrac{\ln 5}{u \ln^2 u}$,

b) $g'(u) = \dfrac{2u^2 \ln u - (u^2+3)\ln(u^2+3)}{u(u^2+3)\ln^2 u}$.

44. $\dfrac{1}{2}$. **45.** 1.

46. $f'(1-) = -1$, $f'(1+) = 1$. f nie jest różniczkowalna w $x_0 = 1$.

47. f jest różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ oraz $f'(x) = 0$ dla $x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$, $f'(x) = (x-3)(3x-11)$ dla $x \in [3, 4)$. W punkcie $x = 4$ f nie jest różniczkowalna, bowiem $f'(4-) = 1$, $f'(4+) = 0$.

48. Dla $(x, y) \neq (0, 0)$ mamy: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\,\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Ponadto, jak łatwo sprawdzić, $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$. Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$ (por. zad. 44, rozdz. VII).

49. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$,

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$,

d) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{1}{u + \ln v}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{1}{v(u + \ln v)}$,

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

f) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=yz\cos x(\sin x)^{yz-1}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=z(\sin x)^{yz}\ln\sin x$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=y(\sin x)^{yz}\ln\sin x,$$

g) $\dfrac{\partial g}{\partial u}=\dfrac{2u}{(u^2+v^2+w^2-1)\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{2v}{(u^2+v^2+w^2-1)\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}=\frac{2w}{(u^2+v^2+w^2-1)\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$

h) $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{-4x}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{-4y}{(x^2+y^2+z^2)^3}$,

$$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{-4z}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

50. **a)** $\dfrac{\partial f(3,4)}{\partial x}=\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{\partial f(3,4)}{\partial y}=\dfrac{1}{5}$,

b) $\dfrac{\partial f(1,2)}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f(1,2)}{\partial y}=\dfrac{1}{4}$,

c) $\dfrac{\partial f(1,-1,1)}{\partial x}=2$, $\dfrac{\partial f(1,-1,1)}{\partial y}=-1$, $\dfrac{\partial f(1,-1,1)}{\partial z}=-1$.

51. Mamy: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

53. **a)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

b) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}=0$,

c) $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial z}=\dfrac{(x-y)z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xy)^3}}$,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}.$$

54. **a)** $f'_u(1,2) = -10$, **b)** $g'_w(1,1) = \sqrt{2}$, gdzie $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

c) $h'_u(1,2,\dots,n) = n(n+1)$.

55. $J_f(1,1,\dots,1) = 1$.

56. $d^2f(x,y)(h_1,h_2) = 6yh_1^2+(12x-4)h_1h_2+2h_2^2$,
$d^2g(x,y)(h_1,h_2) = e^x\cos y\, h_1^2-2e^x\sin y\, h_1h_2-e^x\cos y\, h_2^2$.

57. **a)** $J_f(1,-1) = 6$, **b)** $(g\circ f)'_a(1,1) = -18$.

59. **a)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$, **b)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$.

60. $y''(0) = -\dfrac{2}{3}$. **61.** $y^{(3)}(1) = \dfrac{1}{3}$.

62. f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$ oraz $f'(x) = 3x|x|$.

64. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$. **65.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2 f'(x) = 1$.

66. Funkcja f jest określona dla $\sqrt{2k\pi} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k = 0,1,2,\dots)$, więc w punktach $x = \sqrt{(2k+1)\pi}$ można rozpatrywać tylko lewą pochodną, a w punktach $x = \sqrt{2k\pi}$ $(k\neq 0)$ tylko prawą pochodną. W pozostałych punktach dziedziny f jest różniczkowalna. Mamy: $f'(\sqrt{(2k+1)\pi}\,-) = -\infty$, $f'(\sqrt{2k\pi}\,+) = +\infty$, a $f'(0-) = -1$, $f'(0+) = 1$.

67. Funkcja x^2 ma pochodną wszędzie, a funkcja $\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$ — wszędzie z wyjątkiem punktów $x = 0$ i $x_k = \dfrac{2}{2k+1}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Dlatego funkcja $f(x)$ ma pochodną w zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{0, x_k, k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$. W punktach 0 oraz x_k badamy oddzielnie różniczkowalność funkcji f. Mamy:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\left|\cos\frac{\pi}{h}\right|}{h} = 0,$$

$$f'\left(\frac{2}{2k+1}+\right) = \lim_{h\to 0+}\frac{\left(\frac{2}{2k+1}+h\right)^2\left|\cos\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}\right|}{h} =$$

$$= \frac{2}{(2k+1)^2}\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left|\cos\left[\frac{\pi(2k+1)}{2}+\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}-\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right]\right| =$$

$$= \frac{4}{(2k+1)^2}\cdot\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left|\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}-\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right| = \pi.$$

Podobnie sprawdzamy, że $f'\left(\frac{2}{2k+1}-\right) = -\pi$. Zatem f nie jest różniczkowalna w zbiorze $\{x_k: k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, który ma własność wskazaną w tekście zadania.

68. Mamy: $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$ oraz $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - -\cos\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nie istnieje (dlaczego?), więc f' nie jest ciągła w punkcie $x = 0$.

69. $f'(x_0)$. Z istnienia powyższej granicy nie wynika, że $f'(x_0)$ istnieje. Pokazuje to przykład funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0, \end{cases}$$

gdzie $x_0 = 0$.

70. $a = -2$, $b = -12$. f nie jest różniczkowalna.

71. $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = d = p = 1$.

72. $a = 2$, $b = 0$.

73. $f'(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = 1,$$

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-} -\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{|x|} = -\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x^2} = -1.$$

Zatem f nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

75. $f'(0+) = \frac{\pi}{2}$, $f'(0-) = -\frac{\pi}{2}$, a więc $f'(0)$ nie istnieje.

76. Przedstawiając $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ otrzymujemy, że

$$f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

77. W s k a z ó w k a: Przedstawić $f(x)$ w postaci: $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.

78. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\varphi'(x^2-y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x^2-y^2) - 2y^2\varphi'(x^2-y^2)$.

Stąd

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=2y\varphi'(x^2-y^2)+\frac{1}{y}\varphi(x^2-y^2)-$$

$$-2y\varphi'(x^2-y^2)=\frac{1}{y}\varphi(x^2-y^2)=\frac{z}{y^2}.$$

81. $\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}u'(x)+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}v'(y)+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$. Założenia Czytelnik wydedukuje z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonych wielu zmiennych.

82. Kierunkiem tym jest gradient funkcji $f(x, y) = x^2+y^2+3xy$ w punkcie $(1, 1)$, który jest równy $(5, 5)$. Zatem spadek powierzchni w kierunku dwusiecznej pierwszej ćwiartki płaszczyzny xOy będzie największy.

83. Wersor $\boldsymbol{u}$, o którym mowa w zadaniu, ma postać $\boldsymbol{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Zatem $f'_{\boldsymbol{u}}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) = \cos\alpha+\sin\alpha$. Łatwo pokazać, że $\max\limits_{\boldsymbol{u}} f'_{\boldsymbol{u}}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$ (dlaczego?).

84. Weźmy niezerowy wektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$. Wtedy

$$f'_{\boldsymbol{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\boldsymbol{u})-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1, tu_2)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^3u_1u_2^2}{t(t^2u_1^2+t^2u_2^2)}=\frac{u_1u_2^2}{u_1^2+u_2^2}.$$

Stąd w szczególności $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$.

Gdyby f była różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, to istniałaby funkcja $r(h_1, h_2)$ taka, że $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$ i taka, że $f(h_1, h_2) = r(h_1, h_2)$ dla dowolnego (h_1, h_2). Stąd mamy:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}=0,$$

co jest nieprawdą. Rzeczywiście, biorąc ciąg $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ widzimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0.$$

86. **a)** f jest różniczkowalna wszędzie z wyjątkiem punktu $(0,0)$,

b) f jest wszędzie różniczkowalna,

c) f nie jest różniczkowalna tylko w punkcie $(0,0)$,

d) f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, ponieważ nie jest w tym punkcie ciągła (sprawdzić). W pozostałych punktach $\mathbb{R}^2$ funkcja f jest różniczkowalna.

e) f jest wszędzie różniczkowalna,

f) funkcja g jest różniczkowalna wszędzie poza punktem $(0,0)$.

87. Biorąc wektor jednostkowy $\boldsymbol{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ mamy:

$$f'_{\boldsymbol{a}}(1, -2) = -\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Stąd

$$\max_{\boldsymbol{a}} f'_{\boldsymbol{a}}(1, -2) = \sqrt{2} \quad \text{dla} \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\min_{\boldsymbol{a}} f'_{\boldsymbol{a}}(1, -2) = -\sqrt{2} \quad \text{dla} \quad \alpha = \frac{7}{4}\pi.$$

88. Mamy:

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y,$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} x\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = x.$$

Stąd wynika, że $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x} = 1$. Zatem $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x}$

89. Nietrudno sprawdzić, że gdy $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, to $f'_{\boldsymbol{a}}(0,0) = a_1 + a_2$. Stąd $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 1$.

Gdyby funkcja f była różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, to dla dowolnego niezerowego $h = (h_1, h_2)$ zachodziłaby równość

$$f(h_1, h_2) = h_1 + h_2 + r(h_1, h_2),$$

stąd

$$h_1 + h_2 + \frac{h_1^3 h_2}{h_1^4 + h_2^2} = h_1 + h_2 + r(h_1, h_2),$$

gdzie $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Z drugiej strony

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Zbiegając po paraboli $h_2 = h_1^2$ widzimy, że wtedy granica jest równa $\frac{1}{2}$. Sprzeczność.

90. $f'(0+) = 1$, $f'(0-) = -1$, więc f nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

91. Wskazówka: $f(x) = x$ dla $x \geqslant 1$ oraz $f(x) = 1/x$ dla $x \in (0, 1)$.

92. Różniczkując kolejno funkcję $f(x)$ dla $x \neq 0$, otrzymujemy:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-1/x^2}, \ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = W_{3n}\left(\frac{1}{x}\right),$$

gdzie W_{3n} jest wielomianem stopnia $3n$.

Dalej, stosując twierdzenie de l'Hospitala, możemy się przekonać, że dla dowolnego m naturalnego zachodzi

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^m} = \lim_{z \to +\infty} \frac{m/z}{e^z} = 0.$$

W szczególności otrzymujemy stąd, że $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = 0.$

Przypuśćmy teraz, że $f^{(n-1)}(0) = 0$. Wtedy

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} W_{3n-3}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0,$$

co jest konsekwencją wyżej ustalonego związku. Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej otrzymujemy, że f jest różniczkowalna dowolną ilość razy w punkcie $x = 0$.

93. $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -1$.

94. $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 3$, $d = \frac{9}{4}$.

95. $$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+h)| - |f(x_0)|}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+h)|}{h} = 0,$$

ponieważ z założenia $f(x_0) = 0$ oraz $0 = f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)}{h}.$$

96. Z założenia, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 wynika, że f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu x_0. Zatem równość

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{2h}$$

jest prostym wnioskiem z zad. 69. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia de l'Hospitala, mamy:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

Z powyższych związków wynika żądana równość.

97. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\big(xf(a)-af(a)\big)+\big(af(a)-af(x)\big)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{f(a)-a\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}=f(a)-af'(a).$$

98. Wskazówka: Pokazać najpierw, że jeśli $f'(a)<0<f'(b)$, to istnieje punkt $c\in(a,b)$ taki, że $f'(c)=0$. Następnie sytuację $f'(a)<y<f'(b)$ sprowadzić do poprzedniego przypadku, rozważając funkcję $f(x)-yx$.

99. Napiszmy funkcję $f(x)$ w postaci:

$$f(x)=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}+\frac{1}{c}\left(b-\frac{ad}{c}\right)\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-1}\quad(c\neq 0).$$

Stąd otrzymujemy dość prosto, że

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{c}\left(b-\frac{ad}{c}\right)(-1)^n\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-n-1}n!.$$

100. Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej, mamy:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'},\quad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{1}{f'}\right)}{dy}=\frac{-\frac{f''}{(f')^2}dx}{f'dx}=-\frac{f''}{(f')^3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=-\frac{d\left(\frac{f''}{(f')^3}\right)}{dy}=\frac{\frac{f^{(3)}(f')^3-3(f')^2(f'')^2}{(f')^6}dx}{f'dx}=$$

$$=\frac{3(f'')^2-f'f''}{(f')^5}\quad(f'\neq 0).$$

Podobnie

$$\frac{d^4x}{dy^4}=\frac{10f'f''f^{(3)}-(f')^2f^{(4)}-15(f'')^3}{(f')^7}$$

101. Wskazówka: Zastosować indukcję matematyczną ze względu na stopień wyznacznika oraz wzór Laplace'a na obliczanie wyznacznika.

ROZDZIAŁ IX

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

1. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa wynosi $(5-\sqrt{13})\,a/12$.

2. Równanie stycznej w punkcie przegięcia: $y = \frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-3/2}$.

3. $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2) < 0$ dla $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$.

4. Wyznaczyć minimum funkcji $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

5. Wyznaczyć minimum funkcji $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

7. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$ dla $x \in [0,\ +\infty)$.

8. $|OL| = \frac{1}{\sqrt{15}}$ km.

9. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$. Funkcja f rośnie dla $x \in (0,\ e)$, maleje dla $x \in (e,\ +\infty)$. Asymptota pozioma: $y = 0$, pionowa: $x = 0$, $f_{\max}(e) = \frac{1}{e}$. Punkt przegięcia w $x = e^{3/2}$, $f_p(e^{3/2}) = \frac{3}{2e^{3/2}}$; f wklęsła dla $x \in (0,\ e^{3/2})$, wypukła dla $x \in (e^{3/2},\ +\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = -\infty$. Funkcja g rośnie dla $x \in (0,\ 3)$, maleje dla $x \in (3,\ +\infty)$. Asymptota pozioma: $y = 0$, pionowa: $x = 0$, $g_{\max}(3) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, punkt przegięcia dla $x = 5$, $g_p(5) = \frac{4}{5\sqrt{5}}$; g jest wklęsła dla $x \in (0,\ 5)$, wypukła dla $x \in (5,\ +\infty)$.

c) $h(x)$ jest funkcją parzystą. $\lim_{x\to+\infty}|x|e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty}|x|e^{-x^2} = 0$. Funkcja h nie ma pochodnej, gdy $x = 0$. Niech $x\in(0, +\infty)$. Wtedy h rośnie dla $x\in\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, maleje dla $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. Asymptota pozioma: $y = 0$, $h_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-1/2}$. Punkt przegięcia dla $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $h_p\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-3/2}$, h wklęsła dla $x\in\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, wypukła dla $x\in\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

d) $D_k = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $\lim_{x\to+\infty}k(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty}k(x) = 0$, $\lim_{x\to-1+}k(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1-}k(x) = -\infty$. Funkcja k maleje na każdym z przedziałów $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ oraz rośnie dla $x\in(0, +\infty)$. Asymptota pionowa: $x = -1$, $k_{\min}(0) = 1$. k jest wypukła dla $x\in(-1, +\infty)$ i wklęsła dla $x\in(-\infty, -1)$. k nie ma punktów przegięcia.

e) $l(x)$ jest funkcją parzystą. $\lim_{x\to+\infty}l(x) = 0$. Funkcja l rośnie dla $x\in(0, 1)$ i maleje dla $x\in(1, +\infty)$. Asymptota pozioma: $y = 0$, $l_{\max}(1) = e^{-1/3}$.

f) $D_m = \mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 1\}$. m nieparzysta. Przebieg zmienności funkcji m dla $x > 0$ wygląda następująco: $\lim_{x\to0+}m(x) = 0$, $\lim_{x\to1-}m(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1+}m(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}m(x) = +\infty$. Funkcja m maleje na każdym z przedziałów $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ oraz rośnie dla $x\in(\sqrt{3}, +\infty)$, $m_{\min}(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. m jest wypukła dla $x\in(1, +\infty)$ i wklęsła dla $x\in(0, 1)$. m nie ma punktów przegięcia. Asymptota pionowa: $x = 1$, ukośna: $y = x$.

10. Bok nie leżący na przeciwprostokątnej ma długość $d_{\max} = \frac{c\sin 2\alpha}{4}$, $P_{\max} = \frac{c^2\sin 2\alpha}{8}$.

11. Wysokość stożka $h = 4R$.

12. $y = x-\pi$ (asymptota w $+\infty$) oraz $y = x+\pi$ (asymptota w $-\infty$).

13. $f_{\max}(1) = 2\frac{1}{2}$, $f_{\min}(e) = 2e-\frac{1}{2}e^2$.

14. Rozważmy funkcję $f(x) = x-\frac{1}{x}-2\ln x$ dla $x\in[1, +\infty)$. Wtedy $f(1) = 0$, a ponadto $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$ dla $x > 1$. Stąd już wynika, że $f(x) > 0$ dla $x > 1$, co daje żądaną nierówność.

15. Boki prostokąta o największym polu: $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $b = \sqrt{4-2\sqrt{2}}/2$.

16. Podstawmy $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$. Wtedy $f'(x) = 0$ dla $x > 0$, czyli f jest funkcją stałą. Ale $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, skąd wynika żądana równość.

17. $p = 80$.

18. Funkcja f jest wypukła dla $x \in (0, e^{-3/2})$, wklęsła dla $x \in (e^{-3/2}, +\infty)$. $f_p(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2}e^{-3}$.

19. Dla $a \leqslant 0$ oraz $a = 1/e$ równanie ma jeden pierwiastek. Dla $a \in (0, 1/e)$ równanie ma dwa pierwiastki. Dla $a > 1/e$ równanie nie ma pierwiastków.

20. Wskazówka: Skorzystać z tego, że

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\cos^2\theta}(\alpha-\beta),$$

gdzie $\theta \in (\beta, \alpha)$.

21. **a)** $y = x + \frac{1}{e}$, **b)** $y = 0$ oraz $y = 2x$,

c) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ oraz $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, **d)** $y = x\ln 2 + 2$, $x = 2$.

22. Niech $f(x) = x^3 + x - 3$. Wtedy $f(1) = -1$, $f(2) = 7$, $f'(x) > 0$ dla $x \in (1, 2)$. Zatem istnieje dokładnie jedno $a \in (1, 2)$ takie, że $f(a) = 0$.

23. $C(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

24. $D_f = (0, +\infty)\setminus\{1\}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$. Funkcja f maleje dla $x \in (0, e)$ i rośnie dla $x \in (e, +\infty)$. Asymptoty pionowe: $x = 0$, $x = 1$. $f_{\min}(e) = \frac{e}{\log_2 e}$.

25. $f_{\max}(e^{-1}) = e^{e^{-1}}$.

26. Funkcja $f(x) = x^p$ ma pochodną $f'(x) = px^{p-1}$ (jest nierosnąca). Stąd $f(x)$ — wklęsła. Jednocześnie

$$x - a < x < y - a < y.$$

Korzystając z faktu, że f jest wklęsła, i powyższej relacji otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(y^p + (x-a)^p) \leqslant \frac{1}{2}(x^p + (y-a)^p)$$

czyli żądaną nierówność.

27. Rozwijając funkcję $\sqrt[3]{1+x}$ w szereg Taylora do trzeciego wyrazu, mamy

$$\sqrt[3]{1+x} = 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/3}},$$

gdzie $\theta \in (0, 1)$. Stąd otrzymujemy

$$\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}=\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/3}}.$$

Korzystając z faktu, że

$$0<\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/3}}<\frac{5}{81}x^3$$

otrzymujemy naszą nierówność.

28. Rozważmy funkcję

$$f(a) = a^{p+q}-(p+q)(a^p-a^q).$$

Wtedy

$$f'(a) = (p+q)\,g(a)\,a^{q-1},$$

gdzie

$$g(a) = a^p-pa^{p-q}+q.$$

Korzystając z tego, że

$$g'(a) = pa^{p-1}(1-(p-q)a^{-q})$$

otrzymujemy, że dla $a \geqslant 1$

$$g(a) \geqslant g(1) = 1-(p-q) \geqslant 0,$$
$$f'(a) \geqslant f'(1) \geqslant 0.$$

Zatem mamy

$$f(a) \geqslant f(1) = 1,$$

co daje żądaną nierówność.

30. Wskazówka: Rozwinąć funkcję e^x w szereg Taylora do n-tego wyrazu z resztą w postaci Lagrange'a.

31. Wskazówka: Pokazać, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$$

jest rosnąca dla $x \in [0, +\infty)$.

32. a) Wyznaczyć maksimum funkcji $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, gdy $x \in [0, +\infty)$ i $\alpha \in (0, 1)$.

b) Skorzystać z nierówności pokazanej w zad. 32a, podstawić $x = \frac{a}{b}$ i oznaczyć $1-\alpha = \beta$.

c) Skorzystać z nierówności

$$(1) \quad ab \leqslant \frac{1}{k} a^k + \frac{1}{k'} b^k,$$

przy czym $a, b > 0$; $k, k' > 1$; $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$.

Z (1) otrzymujemy następujące nierówności:

$$(2) \quad \frac{a^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{\lambda}{\lambda+1} b^{(\lambda+1)/\lambda} \geqslant ab,$$

i

$$(3) \quad \frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{\lambda}{\lambda+1} a^{(\lambda+1)/\lambda} \geqslant ab.$$

Po dodaniu (2) i (3) otrzymujemy żądaną nierówność.

33. a) Wyznaczyć maksimum funkcji $f(x) = x^s|\ln x|$, $(s > 0)$ i $x \in (0, 1)$.

b) Wyznaczyć maksimum funkcji $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$ dla $x \in (0, +\infty)$.

c) Zbadać znak pochodnej następującej funkcji

$$f(x) = \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{x} - \ln x \quad \text{dla} \quad x \in (0, +\infty).$$

d) W rozważanej nierówności podstawić $x = \frac{(1+t)^2}{(1-t)}$, gdzie $0 < |t| < 1$. Wtedy

$$(1) \quad \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{2}{1-t^2} \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad 0 < |t| < 1.$$

Rozwijając lewą stronę (1) w szereg Maclaurina, po odpowiednim uporządkowaniu, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) t^{2n} \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad |t| < 1.$$

Koniec dowodu.

e) Wskazówka: Zbadać znak pochodnych następujących funkcji:

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{dla} \quad x > 0,$$

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x+x^2}} \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

34. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \quad \text{dla} \quad x \in (-1, +\infty).$$

Różniczkując, mamy

$$f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Zatem dla $x = 0$ funkcja f ma wartość minimalną i stąd mamy

$$0 \leqslant \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Jest to dowód pierwszej części nierówności. Analogicznie dowodzimy drugą część nierówności.

35. Załóżmy, że a jest k-krotnym pierwiastkiem $W(x)$. Wtedy mamy $W(x) = (x-a)^k P(x)$. Z drugiej strony

$$W'(x) = (x-a)^{k-1}(kP(x) + (x-a)P'(x)).$$

Stąd

$$W'(a) = 0,$$

zatem teza.

36. Obliczając pochodną funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$$

widzimy, że

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in (-1, +\infty).$$

Zatem f jest funkcją stałą na przedziale $(-1, +\infty)$. Dalej mamy

$$f(x) = f(0) = \frac{\pi}{4} \quad \text{dla} \quad x \in (-1, +\infty).$$

Analogicznie dowodzimy tożsamości b i c.

37. **a)** $-\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{3}$, **c)** 1,

d) Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ponieważ $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ (sprawdzić!), więc szukana granica jest równa 0,

e) e^k, **f)** e^{-1}, **g)** 1, **h)** e^{-1}, **i)** $e^{-2/\pi}$, **j)** $e^{-1/3}$, **k)** $e^{-2/\pi}$, **l)** $e^{-1/2}$, **m)** a.

38. W nierówności $\operatorname{tg} z > z \left(0 < z < \frac{\pi}{2}\right)$ podstawmy $z = \frac{\pi}{2} - y$. Otrzymujemy wtedy, że $\operatorname{ctg} y > \frac{\pi}{2} - y$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Po podstawieniu teraz $y = \operatorname{arctg} x \, (x > 0)$ otrzymujemy, że $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) > \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x$. Stąd otrzymujemy żądaną nierówność dla $x > 0$. Łatwo sprawdzić, że nierówność jest również spełniona dla $x = 0$.

Rozważaną nierówność można również udowodnić stosując metody rachunku różniczkowego.

39. $$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{\frac{1}{x}}.$$

Stosując dwukrotnie regułę de l'Hospitala, mamy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^2} = 0.$$

40. Rozważmy funkcję $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie x ma postać $y = f'(x)X - f'(x)x + f(x)$. Ponieważ styczna ta przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc

$$-f'(x)x + f(x) = 0.$$

Dalej mamy:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0.$$

Stąd i z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej mamy $g(x) = c$. Zatem $f(x) = cx$.

41. Zauważmy, że

$$[x^2 f(x)]'' = x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) \geqslant 0.$$

Z nierówności tej wynika, że funkcja $x^2 f(x)$ jest wypukła, czyli na mocy założeń $f(x)x^2$ leży pod osią Ox, a więc $f(x) \leqslant 0$.

42. Ponieważ pochodna funkcji różniczkowalnej na przedziale ma na tym przedziale własność Darboux (por. zad. 98, rozdz. VIII), więc korzystając z tego, że f' ma różne znaki na końcach przedziału $[a, b]$ wnioskujemy, że istnieje $x_0 \in (a, b)$ takie, że $f'(x_0) = 0$.

43. Rozważmy funkcję $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Zauważmy, że $h(a) = h(b) = 0$. Zatem funkcja h spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, więc istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $h'(c) = 0$. Stąd mamy, że $f'(c) = g'(c)$.

44. Zauważmy, że

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (0, +\infty)$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} < 0 \quad \text{dla} \quad x \in (0, +\infty).$$

Zatem f jest rosnąca i wklęsła dla dowolnego $x \in (0, +\infty)$.

45. Wskazówka: Skorzystać z zad. 43.

46. Wymiary poszukiwanego walca wynoszą: $r_{\max} = \frac{16}{7}$, $h_{\max} = \frac{20}{21}$. Natomiast promień kuli $\bar{r}_{\max} = \frac{8}{7}$.

47. Ponieważ

$$W(x) = x^4 + bx + c$$

oraz

$$\lim_{x \to +\infty} W(x) = \lim_{x \to -\infty} W(x) = +\infty,$$

więc $W(x)$ ma pierwiastki rzeczywiste (przynajmniej jedno miejsce zerowe), jeżeli $W_{\min} \leqslant 0$. Zauważmy, że $W'(x) = 4x^3 + b = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{b}{4}}$. Łatwo sprawdzić, że w tym punkcie funkcja $W(x)$ osiąga minimum. Stąd $W_{\min} = W\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{4}}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{b^4}{256}} + b \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{4}} + c$. Z założonego w zadaniu warunku łatwo już wynika, że $W_{\min} \leqslant 0$.

48. Załóżmy, że funkcja f ma punkt przegięcia w punkcie o odciętej x. Wtedy

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x = 0,$$

skąd otrzymujemy, że $\frac{x}{2} = \operatorname{ctg} x$. Uwzględniając tę równość, otrzymujemy

$$y^2(x^2+4) = x^2\sin^2 x\,(x^2+4) = x^2\sin^2 x\,(4\operatorname{ctg}^2 x + 4) =$$
$$= 4x^2(\operatorname{ctg}^2 x + 1)\sin^2 x = 4x^2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 4x^2.$$

49. Skorzystajmy z faktu, że funkcja

$$f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x}$$

ma w punkcie $x = 0$ granicę równą 2. Ponadto

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x}\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x}$$

i $\frac{\sin x}{x} < \cos x$. Zatem $f(x) > 2$, co dowodzi rozważanej nierówności.

50. Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Z założenia znajdziemy $A > a$ takie, że dla $t \geqslant A$ zachodzi

$$(1) \quad g - \varepsilon \leqslant f'(t) \leqslant g + \varepsilon.$$

Weźmy teraz $x > A$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej znajdziemy $\theta \in (0, 1)$ takie, że $f(x) - f(A) = (x - A) f'[A + \theta(x - A)]$. Stąd, na mocy (1), mamy:

$$(x - A)(g - \varepsilon) \leqslant f(x) - f(A) \leqslant (x - A)(g + \varepsilon).$$

Dalej, po prostych przekształceniach, otrzymamy

$$\left(1 - \frac{A}{x}\right)(g - \varepsilon) \leqslant \frac{f(x)}{x} - \frac{f(A)}{x} \leqslant \left(1 - \frac{A}{x}\right)(g + \varepsilon).$$

Załóżmy teraz, że np. $g > 0$ oraz liczba ε zadana jest tak, że $g - \varepsilon > 0$ oraz $\varepsilon \leqslant \frac{2}{g}$. Wtedy z ostatniej nierówności, po uwzględnieniu, że $1 - \frac{A}{x} > 0$, otrzymujemy $g - 2\varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{x} - \frac{f(A)}{x} \leqslant g + \varepsilon \leqslant g + 2\varepsilon$, i dalej

$$\frac{f(A)}{x} - 2\varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{x} - g \leqslant \frac{f(A)}{x} + 2\varepsilon.$$

Stąd już widać, że dla x odpowiednio dużych, wyrażenie $\frac{f(x)}{x} - g$ jest dowolnie małe (ponieważ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(A)}{x} = 0$). Zatem $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = g$.

Dowód w przypadkach $g = 0$ i $g < 0$ pozostawiamy Czytelnikowi.

51. Korzystając z zad. 50 mamy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Z drugiej strony

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Zatem $k = 0$.

52. $t_{\min} = \dfrac{2av_1 + 2av_2 \cos\alpha}{v_1^2 + v_2^2 - 4v_1 v_2 \cos\alpha}$.

53. W punkcie $A(1, 1)$.

54. Wobec twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej mamy:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \to +\infty} f'(x + \theta(x)),$$

przy czym $\theta(x) \in (x, x+1)$. Zatem na mocy założeń zadania otrzymujemy:

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x + \theta(x)) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = C.$$

Stąd

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = C.$$

55. $d_{\max} = 13\sqrt{13}$.

56. Z założenia, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ jest spełniona nierówność

$|f(x) - f(y)| \leqslant |h|^{\alpha}$.

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant \lim_{h \to 0} |h|^{\alpha - 1} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 = f'(x)$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, co oznacza, że f jest funkcją stałą na zbiorze $\mathbb{R}$.

57. Rozważmy funkcję

$f(x) = x^p + (1-x)^p$, dla $x \in [0, 1]$ i $p > 1$.

Łatwo sprawdzić, że

$$f_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}, \; f_{\max}(1) = 1,$$

skąd wynika nasza nierówność.

58. Zauważmy, że

$$f(x) = (7+x)\sqrt[3]{11-3x} = \sqrt[3]{(7+x)^3(11-3x)}.$$

Zatem wystarczy znaleźć maksimum funkcji

$g(x) = (7+x)^3(11-3x)$.

Stąd otrzymujemy, że

$f_{\max}(1) = 16$.

59. Wskazówka: Wziąć funkcję $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ dla $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i pokazać, że $f'(x) > 0$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

60. Różniczkując względem a wzór dwumianowy Newtona (por. zad. 16, rozdz. I), otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k} k a^{k-1} b^{n-k} = n(a+b)^{n-1},$$

co po pomnożeniu przez a daje żądany wzór.

61. d) Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej mamy

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b),$$

gdzie $\xi \in (b, a)$.

Ponieważ jednak $\dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{b}$, więc stąd otrzymujemy, że $\ln \dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a-b}{b}$. Druga część nierówności wynika z faktu, że $\dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{a}$.

Uwaga. Analogicznie (poprzez twierdzenie Lagrange'a) dowodzimy nierówność z punktów a, b i c.

62. a) 0, **b)** -1, **c)** $e^{1/6}$, **d)** $\sqrt{e}$, **e)** $-\dfrac{1}{6}$, **f)** $\dfrac{1}{2}$, **g)** $e^{1/2}(\ln^2 a - \ln^2 b)$.

64. Podamy dwa sposoby rozwiązania tego zadania.

I sposób: Wyznaczamy kresy funkcji $f(x) = a \sin x + b \cos x$ na zbiorze $\mathbb{R}$. Ponieważ funkcja f jest okresowa i jej okres jest równy 2π, więc wystarczy wyznaczyć kresy tej funkcji na przedziale $[0, 2\pi]$. Ciągłość funkcji f pozwala z kolei zredukować ten problem do wyznaczenia ekstremów funkcji f na tym przedziale.

Korzystając z metod rachunku różniczkowego widzimy, że wystarczy wyznaczyć miejsca zerowe pochodnej f' znajdujące się w przedziale $[0, 2\pi]$. Rozwiązujemy zatem równanie $f'(x) = a\cos x - b \sin x = 0$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \neq 0$ i $b \neq 0$ (przypadek $a = 0$ lub $b = 0$ jest trywialny). W zależności od znaków liczb a i b rozważamy cztery przypadki.

Jako pierwszy przypadek będziemy rozważać sytuację, gdy $a > 0$ i $b > 0$. Zauważmy, że równanie $a\cos x - b\sin x = 0$ jest równoważne równaniu $\operatorname{tg} x = \dfrac{a}{b}$, które ma dwa rozwiązania $x_1 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ oraz $x_2 \in \left[\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$. Dalej mamy

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{b}{a} \Rightarrow \sin x_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos x_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Stąd $f(x_1) = \sqrt{a^2+b^2}$.

Podobnie otrzymujemy, że $f(x_2) = -\sqrt{a^2+b^2}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f(x) = \max\{b, \sqrt{a^2+b^2}, -\sqrt{a^2+b^2}\} = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\min_{x\in[0,2\pi]} f(x) = -\sqrt{a^2+b^2}.$$

Analogicznie postępujemy w pozostałych trzech przypadkach, otrzymując takie same wyniki końcowe.

Dowodzi to prawdziwości rozważanej nierówności.

II sposób: Zauważmy, że

$$|a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right|.$$

Weźmy kąt α taki, że

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Wtedy otrzymamy

$$\sqrt{a^2+b^2}\,|\sin\alpha\cos x + \sin x\cos\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(\alpha+x)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2},$$

a to oznacza naszą nierówność.

65. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \quad \text{dla} \quad x\in(1, +\infty).$$

Mamy:

$$f'(x) = \frac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2} < 0, \quad \text{gdy} \quad x\in(1, +\infty).$$

Oznacza to, że f jest ściśle malejąca na przedziale $(1, +\infty)$, więc

$$f(x) > f(y) \quad \text{dla} \quad 1 < x < y.$$

Podstawiając teraz $x = 2$, $y = 3$, otrzymujemy żądaną nierówność.

66. Weźmy funkcję $f(x) = x^5+px+q$. Zauważmy, że $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ oraz $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ oraz $f'(x) = 5x^4+p$. Stąd widać, że dla istnienia trzech pierwiastków funkcji f konieczne jest, aby równanie $f'(x) = 0$ miało dwa różne rozwiązania, a to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p < 0$. Rozwiązując równanie $f'(x) = 0$, otrzymujemy $x_1 = -\sqrt[4]{\frac{-p}{5}}$, $x_2 = \sqrt[4]{\frac{-p}{5}}$. Łatwo pokazać, że w punkcie x_1 funkcja f osiąga maksimum lokalne, a w punkcie x_2 — minimum lokalne. Zatem, aby f miała trzy pierwiastki musi być $f(x_1) > 0$ i $f(x_2) < 0$.
Stąd otrzymujemy

$$\sqrt[4]{\frac{-p}{5}} > \frac{5q}{6p}, \quad \sqrt[4]{\frac{-p}{5}} > -\frac{5q}{6p}.$$

Ponieważ z dwu liczb $5q/6p$ i $-5q/6p$ przynajmniej jedna jest nieujemna, zatem podnosząc odpowiednią nierówność do czwartej potęgi otrzymujemy, że nierówność $6^4p^5+5^5q^4<0$ jest WKW na to, żeby funkcja f miała trzy pierwiastki.

67. Niech $x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n$ będą miejscami zerowymi funkcji f w przedziale (a, b).

Ponieważ $f(x_k)=f(x_{k+1})=0$ dla $k=1,\ldots,n-1$, więc na mocy twierdzenia Rolle'a istnieje punkt $x_k'\in(x_k, x_{k+1})$ taki, że $f'(x_k')=0$ dla $k=1,\ldots,n-1$. Koniec dowodu.

68. Rozważmy funkcję f postaci

$$f(x)=\frac{x^n}{1+x^{2(n-1)}},\quad (x\geqslant 0,\ n>2).$$

f jest dodatnia oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $f(0)=0$, zatem istnieje maksimum funkcji f dla $x=x_0\in[0, +\infty)$.

Przyrównując do zera pochodną funkcji f, mamy

$$f'(x)=\frac{nx^{n-1}+nx^{3(n-1)}-2(n-1)x^{3n-2}}{(1+x^{2(n-1)})^2}=0.$$

Stąd

$$x_0=\sqrt[2(n-1)]{\frac{n}{n-2}}.$$

Dalej

$$f_{\max}(x_0)=\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt[2(n-1)]{\left(\frac{n}{n-2}\right)^n}$$

oraz $f(1)=\frac{1}{2}$. Ale $f(x_0)>f(1)$, a więc

$$\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt[2(n-1)]{\left(\frac{n}{n-2}\right)^n}>\frac{1}{2}.$$

Stąd, po przekształceniu, otrzymujemy żądaną nierówność.

69. Rozważmy funkcję

$$f(x)=x^3-3\sin x+3x\cos x,\quad \text{dla}\quad x\in\left(0, \frac{1}{2}\pi\right).$$

Wtedy

$$f'(x)=3x(x-\sin x)>0\quad \text{dla}\quad x\in\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$$

oraz $f(0)=0$. Zatem $f(x)>0$ dla $x\in\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$, co daje nierówność po prawej stronie. Nierówność po lewej stronie dowodzimy w analogiczny sposób.

70. Zauważmy, że rozważana nierówność jest równoważna nierówności

$$x - \sin x (\cos x)^{-1/a} < 0 \quad \text{dla} \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right).$$

Aby udowodnić tę nierówność należy obliczyć $f'(x)$ i $f''(x)$, gdzie $f(x) = x - \sin x (\cos x)^{-1/a}$, $(a > 1)$, a następnie zbadać znak f' oraz f'' dla $a = 3$ oraz skorzystać z faktu, że

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^a > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \quad \text{dla} \quad a < 3 \text{ oraz } x \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right).$$

71. Wskazówka: Wystartować z równości

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x \frac{df(x)}{dx}\right) = -\frac{x^3}{3!}\sin x,$$

gdzie $f(x) = \dfrac{(x - x^3/3!)}{\sin x}$ jest funkcją rosnącą na przedziale $(0, \pi)$.

72. Rozważmy funkcję $f(a) = \left(\dfrac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}\right)^t \cdot a^t$. Wtedy z uwagi na fakt, że $\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+4}) > 1$ dla $a > 0$ i $t \geqslant 2$ mamy następujące oszacowanie

$$f'(a) = ta^t\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2a}\right)^t \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} - \frac{1}{a}\right] \geqslant$$

$$\geqslant ta^t\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} - \frac{1}{a}\right] =$$

$$= ta^t\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} > 0.$$

Ponadto $f(0) = 1$. Zatem prawdziwa jest rozważana nierówność.

73. Zauważmy, że nierówność z naszego zadania wynika z następującej nierówności

$$(a+x)^a < a^{a+x},$$

prawdziwej dla $a \geqslant e$ oraz $x > 0$. Istotnie, wystarczy podstawić $a = n$ oraz $x = r$.

Z drugiej strony, napisaną wyżej nierówność udowadnia się łatwo metodami rachunku różniczkowego, co pozostawiamy Czytelnikowi.

74. Rozważana nierówność jest równoważna następującej

$$n \ln(1 - x^n) - m \ln(1 - x^m) - (n-m) \ln(1 - x^{n+m}) > 0.$$

Zapiszmy tę ostatnią nierówność jako

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-m)\, x^{(m+n)k} + m x^{mk} - n x^{nk}}{k} > 0$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A_k > 0,$$

gdzie oczywiście $A_k = (n-m)x^{(m+n)k} + mx^{mk} - nx^{nk}$. Zauważmy, że jest ona prawdziwa, jeśli $f(x) = (n-m)x^{n+m} + mx^m - nx^n > 0$ dla $0 < m < n$ (ponieważ $A_k = f(x^k)$), co zachodzi wtedy, gdy

$$\frac{1-x^n}{1-x^m} > \frac{nx^{n-1}}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x^{n-m}$$

dla $0 < m < n$ oraz $x \in (0, 1)$.

Ale ostatnia nierówność wynika z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej, bowiem

$$\frac{1-x^n}{1-x^m} = \frac{na^{n-1}}{ma^{m-1}} = \frac{n}{m}a^{n-m} > \frac{n}{m}x^{n-m},$$

dla $x < a < 1$.

75. Wskazówka: Zauważyć, że rozważana w zadaniu nierówność jest równoważna nierówności

$$a(x^{a+2} - x^{-a}) - (a+1)(x^a - x^{-a}) > 0.$$

76. Rozważmy funkcję $f(p) = (1+p)\cdot p^{\frac{p}{1-p}}$, która pokrywa się ze „środkiem" dowodzonej równości. Zauważmy, że $\ln f(p) = \ln(1+p) + \frac{p}{1-p}\ln p$, skąd po zróżniczkowaniu

$$\frac{f'(p)}{f(p)} = \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1-p)^2}\ln p + \frac{1}{1-p} =$$

$$= \frac{1}{(1-p)^2}\left(\ln p + 2\frac{1-p}{1+p}\right) = \frac{g(p)}{(1-p)^2},$$

gdzie $g(p) = \ln p + 2\frac{1-p}{1+p}$. Dalej mamy

$$g'(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2 > 0,$$

a więc $g(p) < g(1) = 0$. Stąd wynika, że funkcja $\ln f(p)$, a w konsekwencji i $f(p)$, jest malejąca. Teraz wystarczy zauważyć, że stąd otrzymujemy

$$\frac{2}{e} = \lim_{p\to 1} f(p) < f(p) < \lim_{p\to 0+} f(p) = 1$$

dla $p \in (0, 1)$ i koniec dowodu.

77. Z założeń w zadaniu wynika, że $W(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, gdzie $a \neq 0$. Oznaczmy $W_i(x) = \dfrac{W(x)}{x-x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Wtedy

$$W_i(x_j) = \begin{cases} W_i(x_i) \neq 0 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Dalej mamy

$$W'(x) = W_1(x) + W_2(x) + \dots + W_n(x),$$

a więc $W'(x_i) = W_i(x_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Rozważmy dalej wielomian $F(x)$ określony następująco

$$F(x) = \frac{W_1(x)}{W'(x_1)} + \frac{W_2(x)}{W'(x_2)} + \dots + \frac{W_n(x)}{W'(x_n)} - 1.$$

Stopień tego wielomianu nie przekracza $n-1$. Ponadto

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{W_j(x_i)}{W'(x_j)} - 1 = \frac{W_i(x_i)}{W'(x_i)} - 1 = 0.$$

Stąd widać, że F ma co najmniej n różnych pierwiastków. Ponieważ jest on stopnia $\leqslant n-1$, więc stąd wnioskujemy, że $F(x)$ jest wielomianem zerowym. Stąd oczywiście wynika, że współczynnik przy x^{n-1} w wielomianie $F(x)$ jest równy 0. Z drugiej jednak strony współczynnik ten jest równy

$$\frac{a}{W'(x_1)} + \frac{a}{W'(x_2)} + \dots + \frac{a}{W'(x_n)}.$$

Koniec dowodu.

78. Załóżmy, że $W(x)$ nie jest wielomianem stałym (dowód w przypadku, gdy $W(x)$ jest stały, jest trywialny). Wystarczy pokazać, że wszystkie minima wielomianu $u(x)$ są nieujemne.

Niech więc u osiąga minimum w punkcie $x = x_0$. Wtedy $u'(x_0) = 0$, więc

$$u(x_0) = W(x_0) + W'(x_0) + W''(x_0) + \dots = W(x_0) + u'(x_0) = W(x_0) \geqslant 0,$$

co oznacza koniec dowodu.

79. Wskazówka: Podstawić $x = ye^{6t}$.

81. Wskazówka: Wykorzystać twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

82. Wskazówka: Wystartować z nierówności

$$C_0(x) = 1 \geqslant \cos x, \; x \in \mathbb{R},$$
$$S_1(x) = x \geqslant \sin x, \; x \in \mathbb{R}.$$

Następnie dowodzić kolejno (przy wzrastającym wskaźniku n) rozważane nierówności, odwołując się do poprzednich.

84. Mamy:

$$g = \lim_{x\to\infty}\left(f'(x)+f(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x f'(x)+e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x f(x))'}{(e^x)'}.$$

Stąd, na mocy twierdzenia de l'Hospitala otrzymujemy

$$g = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

85. Nierówność z zadania jest równoważna nierówności

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^{p+x/2}$$

dla $x\in\mathbb{R}_+$ oraz $n\in\mathbb{N}$.

Żeby udowodnić powyższą nierówność wystarczy pokazać, że zachodzi nierówność ogólniejsza

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p < e^x < \left(1+\frac{x}{p}\right)^{p+\frac{x}{2}}$$

dla $x>0$ i $p>0$.

Dalej zauważmy, że ponieważ $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{p}\right)^p = e^x$, to dla udowodnienia nierówności po lewej stronie wystarczy wykazać, że funkcja $p\to\ln\left(1+\dfrac{x}{p}\right)^p$ jest rosnąca dla $p>0$.

Podobnie dowodzimy nierówności po prawej stronie.

86. W przypadku, gdy $a\geqslant 1$ lub $b\geqslant 1$, nierówność jest oczywista.

Załóżmy zatem, że $a, b\in(0,1)$. Oznaczmy przez k liczbę $\dfrac{b}{a}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $k\in(0,1]$ (dlaczego?). Wtedy mamy

$$f(a) = (a^a)^k + k^a a^a \geqslant \lambda^k + k\lambda,$$

gdzie $\lambda = \exp(-1/e) = \min\{a^a : a\in(0,1)\}$ oraz $k^a\geqslant k$. Zauważmy, że funkcja $F(k) = \lambda^k + k\lambda$ ma jedyne minimum w punkcie $k_0 = 1-e < 0$ i jest rosnąca dla $k>k_0$. Ale $F(0)=1$, więc $F(k) > F(0) = 1$. Stąd $f(a) > 1$.

87. Jeżeli f ma n pierwiastków w przedziale $(a, +\infty)$, to f' ma $n-1$ pierwiastków w tym przedziale (twierdzenie Rolle'a). Niech x_n będzie największym pierwiastkiem funkcji f. Wtedy $f(x_n)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, zatem f ma w przedziale $(x_n, +\infty)$ co najmniej jedno ekstremum w jakimś punkcie x_n'. Wtedy oczywiście $f'(x_n') = 0$.

88. Weźmy funkcję $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x) - x$. Zauważmy, że $f(0) = 0$ oraz $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cos(\operatorname{tg} x) - 1$. Dalej mamy, że $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(\operatorname{tg} x) \geqslant \cos^2 x$, dla $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Aby udowodnić ostatnią nierówność powołajmy się na nierówność

$$\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}, \ x \in \mathbb{R}$$

(por. zad. 82). Stąd

$$\cos(\operatorname{tg} x) \geqslant 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}.$$

Zatem, wystarczy teraz wykazać, że $1 - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x \geqslant \cos^2 x$ dla $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ lub równoważnie (po przekształceniach), że $2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 \leqslant 0$. Nierówność ta wynika stąd, że jeżeli podstawimy $t = \cos^2 x$, to $2t^2 - 3t + 1 \leqslant 0$ dla $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ $\left(\text{bo dla } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ mamy } t = \cos^2 x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right)$.

89. Niech $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x) - x$ dla $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$. Wtedy $f(0) = 0$ oraz $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - 1$. Mamy

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant \cos^2(\sin x)$$

dla $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$. Ponieważ jednak

$$\cos^2(\sin x) = \frac{1 + \cos(2\sin x)}{2},$$

więc

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 + \cos(2\sin x) \leqslant 2\cos x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Skorzystajmy teraz z nierówności $\cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Stąd mamy

$$\cos(2\sin x) \leqslant 1 - 2\sin^2 x + \frac{2}{3}\sin^4 x,$$

zatem, aby udowodnić nierówność $1 + \cos(2\sin x) \leqslant 2\cos x$ $\left(x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]\right)$ wystarczy pokazać, że

$$2 - 2\sin^2 x + \frac{2}{3}\sin^4 x \leqslant 2\cos x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Nierówność powyższa jest równoważna następującej

$$\cos^4 x + \cos^2 x - 3\cos x + 1 \leqslant 0,$$

a ta z kolei, jest równoważna nierówności

$$t^4 + t^2 - 3t + 1 \leqslant 0$$

(po podstawieniu $t = \cos x$).

Zauważmy dalej, że

$$t^4 + t^2 - 3t + 1 = (t-1)(t^3 + t^2 + 2t - 1).$$

Ponadto $t - 1 \leqslant 0$, więc

$$t^4 + t^2 - 3t + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 + 2t - 1 \geqslant 0$$

$$\text{dla } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Pozostawiamy Czytelnikowi dowód tej ostatniej nierówności.

Wskazówka: Rozpatrzyć funkcję $g(t) = t^3 + t^2 + 2t - 1$ na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ i wykorzystać metody rachunku różniczkowego.

90. Wskazówka: Dla dowolnego wielomianu $f(x)$ rozważyć wielomiany $H_1(x)$ oraz $H_2(x)$ określone następująco:

$$H_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \{[f'(t)]^2 + f'(t) + 1\}\, dt + f(0),$$

$$H_2(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \{[f'(t)]^2 - f'(t) + 1\}\, dt.$$

Pokazać, że $H_1'(x) > 0$, $H_2'(x) > 0$ oraz $f(x) = H_1(x) - H_2(x)$.

91. Gdyby liczba a była pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $W_n(x)$, to byłaby też pierwiastkiem wielomianu $W_n'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = W_{n-1}(x)$. Stąd $W_n(a) = W_{n-1}(a) = 0$, co implikuje, że $\frac{a^n}{n!} = W_n(a) - W_{n-1}(a) = 0$. Zatem mielibyśmy $a = 0$. Jednakże $W_n(0) = 1 \neq 0$ i sprzeczność.

92. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ zachodzi $g - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant g + \varepsilon$. Stąd otrzymujemy

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{n_0} \frac{x^n}{n!} + (g-\varepsilon) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leqslant e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-x}\sum_{n=0}^{n_0} a_n\frac{x^n}{n!}+(g+\varepsilon)e^{-x}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

dla $x>0$.

Następnie, wykorzystując twierdzenie de l'Hospitala, można pokazać, że

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{n_0} a_n\frac{x^n}{n!}=0,\quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1.$$

Zatem twierdzenie o trzech funkcjach (będące odpowiednikiem twierdzenia o trzech ciągach) daje żądaną równość.

93. W s k a z ó w k a: Skorzystać z zad. 109.

94. Określmy funkcję H w następujący sposób:

$$H(x)=\int_a^{a+\int_a^x g(t)\,dt} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)g(t)\,dt.$$

Wtedy $H(a)=0$, a ponadto

$$\int_a^x g(t)\,dt<\int_a^x dt=x-a.$$

Stąd $a+\int_a^x g(t)\,dt\leqslant x$ i dalej

$$f\Big(a+\int_a^x g(t)\,dt\Big)\geqslant f(x).$$

Korzystając z powyższej nierówności, otrzymujemy

$$H'(x)=f\Big(a+\int_a^x g(t)\,dt\Big)-f(x)g(x)\geqslant 0,\ x\in[a,b].$$

Zatem funkcja H przyjmuje ekstrema na końcach przedziału $[a, b]$, skąd już łatwo otrzymujemy naszą nierówność.

95. Oznaczmy $f(x)=(x+1)\cos\dfrac{\pi}{x+1}-x\cos\dfrac{\pi}{x}$. Wykorzystując rozwinięcie funkcji cosinus w szereg Maclaurina, możemy napisać

$$f(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}\left[\frac{1}{x^{2k-1}}-\frac{1}{(x+1)^{2k-1}}\right].$$

Aby wykazać naszą nierówność wystarczy pokazać, że

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}\left[\frac{1}{x^{2k-1}}-\frac{1}{(x+1)^{2k-1}}\right]>0$$

dla $x \geqslant \sqrt{3}$.

W tym celu zauważmy, że powyższy szereg jest szeregiem naprzemiennym dla $x > 0$. Zatem, aby wykazać wyżej napisaną nierówność wystarczy pokazać, że

$$\frac{1}{x^{2k-1}}-\frac{1}{(x+1)^{2k-1}}>\frac{1}{x^{2k+1}}-\frac{1}{(x+1)^{2k+1}}$$

dla $x \geqslant \sqrt{3}$ i $k = 1, 2, \ldots$, lub równoważnie wystarczy dowieść, że funkcja

$$f_k(x)=\frac{1}{x^{2k-1}}-\frac{1}{x^{2k+1}}$$

jest malejąca na przedziale $[\sqrt{3}, +\infty)$, dla $k = 1, 2, \ldots$ Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Uwaga. W powyższym dowodzie wykorzystujemy znane twierdzenie Leibniza dotyczące szeregów naprzemiennych.

96. Weźmy funkcję $f_n(x) = \dfrac{S_{2n-1}(x)}{\sin x}$. Wtedy

$$\sin^2 x\, f_n'(x) = S_{2n-1}'(x)\sin x - S_{2n-1}(x)\cos x.$$

Ponieważ $S_{2n-1}''(x) = -S_{2n-3}(x)$, więc

$$(\sin^2 x\, f_n'(x))' = (S_{2n-1}(x)-S_{2n-3}(x))\sin x = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\,x^{2n-1}\cdot\sin x.$$

Dla $x\in(0,\pi)$ i dla n parzystych mamy

$$(\sin^2 x\, f(x))' < 0,$$

skąd $\sin^2 x\, f_n'(x) < \sin^2 0\, f'(0) = 0$. Stąd wnioskujemy, że $f_n'(x) < 0$, a więc f_n jest funkcją malejącą na przedziale $(0, \pi)$. Zatem

$$(*)\qquad \frac{S_{2n-1}(x_2)}{\sin x_2}<\frac{S_{2n-1}(x_1)}{\sin x_1}$$

dla $x_1 < x_2$ oraz $x_1, x_2 \in (0, \sqrt{6}) \subset (0, \pi)$.

Teraz, korzystając z faktu, że

$$\frac{x_1^{4k+1}}{(4k+1)!}>\frac{x_1^{4k+3}}{(4k+3)!}$$

wnosimy, że $S_{2n-1}(x) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $x\in(0, \sqrt{6})$. Zatem, z nierówności $(*)$ mamy

$$\frac{S_{2n-1}(x_2)}{S_{2n-1}(x_1)} < \frac{\sin x_2}{\sin x_1}.$$

Dowód drugiej nierówności (analogiczny) pozostawiamy Czytelnikowi.

97. W s k a z ó w k a: Pokazać, że funkcja $f(x) = x-(x+1)\ln(x+1)$ przyjmuje na przedziale $(0, +\infty)$ ujemne wartości.

98. W s k a z ó w k a: Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.

100. Z założeń przyjętych w zadaniu wynika, że

$$\frac{h(ax)-h(a\cdot 0)}{ax} = \frac{bh(x)-bh(0)}{ax}.$$

Stąd, przy $x \to 0$, otrzymujemy $h'(0) = \frac{b}{a}h'(0)$, a więc $a = b$. Zatem $h(ax) = ah(x)$.

Z ostatniego związku, przez prostą indukcję otrzymujemy

$$h(a^n x) = a^n h(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

oraz

$$h(a^{-n}x) = a^{-n}h(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Zakładając więc (bez straty ogólności), że $|a| < 1$, otrzymujemy, że $a^n x \to 0$ przy $n \to \infty$. Dalej mamy

$$h'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(a^n x)-h(0)}{a^n x} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(a^n x)}{a^n x} = \frac{h(x)}{x},$$

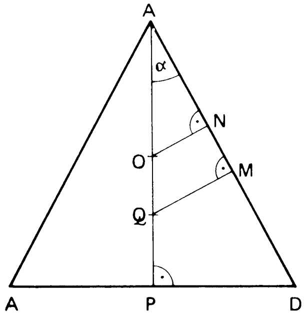
ponieważ, jak łatwo zauważyć, $h(0) = 0$. Stąd

$$h(x) = h'(0)\,x = cx,$$

gdzie $c = h'(0)$.

101. W s k a z ó w k a: Zastosować metodę indukcji matematycznej względem k.

102. Niech S będzie dowolnym stożkiem wpisanym w kulę B, a K kulą wpisaną w stożek S. Weźmy przekrój osiowy stożka S przedstawiony na rys. 21.



Rys. 21

Niech O będzie środkiem kuli B, a Q środkiem kuli K. Oczywiście O jest środkiem koła opisanego na trójkącie ACD oraz Q jest środkiem koła wpisanego w ten trójkąt. Przy oznaczeniach z rys. 21 niech $R = AO$. Wtedy objętość stożka S wyraża się zależnością

$$V_S = \frac{8}{3}\pi R^3 \sin^2\alpha \cos^4\alpha$$

lub

$$V_S = \frac{8}{3}\pi R^2 a^2 (1-a^2)^2,$$

jeżeli przyjmiemy $a = \sin\alpha$.

Podobnie, objętość kuli K wyraża się następująco

$$V_K = \frac{32}{3}\pi R^3 a^3 (1-a)^3.$$

Stąd

$$V = V(a) = V_S + V_K = \frac{8}{3}\pi R^3 a^2 (1-a)^2 (1+6a-3a^2).$$

Dla wyznaczenia maksymalnej objętości V_S wyznaczamy maksimum funkcji $f(a) = a(1-a^2)$ dla $a \in (0, 1)$. Mamy

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Podobnie, kula K ma maksymalną objętość, gdy funkcja $g(a) = a(1-a)$ przyjmuje wartość maksymalną na przedziale (0, 1).
Stąd

$$g_{\max} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Dalej mamy

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3}\pi R^3 \cdot \frac{4}{9}(2\sqrt{3}-3),$$

$$V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}\pi R^3 \cdot \frac{13}{64}.$$

Stąd $V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > V\left(\frac{1}{2}\right)$, co oznacza, że suma S_2 i K_2 jest większa niż suma S_1 i K_1.

103. Niech $\{1, 2, 3, \dots, n\} = A_k \cup B_k$, gdzie $A_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ i $B_k = \{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_n\}$, będzie rozkładem zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na sumę zbioru k-elementowego oraz $n-k$-elementowego.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że próby o numerach $i_1, i_2, \dots, i_k$ dały pozytywny wynik, a pozostałe negatywny, wynosi

$$p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k} \cdot (1-p_{i_{k+1}}) \dots (1-p_{i_n}).$$

Zatem

$$r_k = \sum_{A_k} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k} \cdot (1-p_{i_{k+1}}) \dots (1-p_{i_n}),$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie podzbiory k-elementowe A_k zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Rozpatrzmy dalej wielomian

$$W(x) = (p_1 x + (1-p_1))(p_2 x + (1-p_2)) \dots (p_n x + (1-p_n)).$$

Z wyżej uzyskanych zależności mamy

$$W(x) = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \dots + r_1 x + r_0.$$

Dalej

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i W(x)}{p_i x + (1-p_i)}.$$

Ponieważ $W(1) = 1$, więc $W'(1) = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Z drugiej strony

$$W'(x) = n r_n x^{n-1} + (n-1) r_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 r_2 x + r_1,$$

a więc również

$$W'(1) = \sum_{k=1}^{n} k r_k.$$

Ostatecznie

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{k=0}^{n} k r_k.$$

104. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wtedy $f(0) = c$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$, $f(1) = a+b+c$. Ale $f'(0) = b = 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right) - (a+b+c) - 3c = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0)$.

Jeżeli $|f(x)| \leqslant 1$ dla $x \in [0, 1]$, to

$$f'(0) \leqslant |f'(0)| \leqslant 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + |f(1)| + 3|f(0)| \leqslant 8.$$

Zatem $A \leqslant 8$.

Zauważmy dalej, że trójmian $f(x) = -8x^2 + 8x - 1$ spełnia warunek $|f(x)| \leqslant 1$ dla $x \in [0, 1]$. Ale $f'(0) = 8$. Ostatecznie otrzymujemy $A = 8$.

105. $A = 18$.
Wskazówka: Pokazać, że jeżeli $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, to $f'(0) = f(1) - \frac{8}{3}f\left(\frac{3}{4}\right)+8f\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{19}{3}f(0)$. Wywnioskować stąd, że $f'(0) \leqslant A \leqslant 18$. Dla pokazania, że $A = 18$ rozpatrzeć wielomian $f(x) = 4(2x-1)^3-3(2x-1)$.

106. Weźmy wielomian $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Wtedy $f'(a_1) = \lim_{x\to a_1}\frac{f(x)-f(a_1)}{x-a_1} = (a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdot\ldots\cdot(a_1-a_n)$. Analogicznie

$$f'(a_i) = (a_i-a_1)(a_i-a_2)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n),$$

dla $i = 2, 3, \dots, n$. Stąd wynika, że nierówność z naszego zadania ma postać

$$f'(a_1)+f'(a_2)+\ldots+f'(a_n) \geqslant 0.$$

Poszukiwać będziemy teraz takiego wielomianu $f(x)$, żeby wszystkie składniki po lewej stronie powyższej nierówności, oprócz jednego, były równe zeru.

Załóżmy, że $n = 4$ lub $n \geqslant 6$ oraz $a_2 = a_3 = a_4$ lub odpowiednio $a_5 = a_6 = \ldots = a_n$. Wtedy

$$f'(a_2) = f'(a_3) = \ldots = f'(a_n) = 0.$$

Zatem nasza nierówność ma postać

$$f'(a_1) \geqslant 0.$$

Stąd

$$(a_1-a_2)^3(a_1-a_5)^{n-4} \geqslant 0.$$

Zauważmy, że można dobrać liczby a_1, a_2 oraz a_5 tak, żeby nie zachodziła ostatnia nierówność, np. $a_1 < a_2$ oraz $a_1 > a_5$. Koniec dowodu.

107. Wskazówka: Zastosować metodę indukcji względem n.

109. Ustalmy $h > 0$. Wtedy, korzystając z twierdzenia Taylora, wnioskujemy, że istnieje $\xi \in (x, x+2h)$ takie, że

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+2h)-f(x)]-hf''(\xi).$$

Stąd $f'(x) \leqslant hM_2+\frac{M_0}{h}$, co daje $0 \leqslant hM_2+\frac{M_0}{h}-M_1$. Zatem $0 \leqslant M_2h^2-M_1h+M_0$. Z kolei aby zachodziła ta nierówność musi być spełniony warunek $M_1^2-4M_0M_2 \leqslant 0$. Koniec dowodu.

110. Wystartujemy od następującej tożsamości

$$\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)}{x^3} = \frac{1}{3!}+\frac{x}{4!}+\frac{x^2}{5!}+\ldots,$$

dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Po dwukrotnym różniczkowaniu otrzymujemy

$$\frac{e^x(12-6x+x^2)-(12+6x+x^2)}{x^5} = \frac{1}{60}\left(1+\ldots+\frac{60}{(n+3)(n+4)(n+5)}\frac{x^n}{n!}+\ldots\right).$$

Dalej, korzystając z tego, że

$$\frac{60}{(n+3)(n+4)(n+5)} \cdot \frac{|x|^n}{n!} \leqslant \frac{|x|^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

otrzymujemy

$$|e^x(12-6x+x^2)-(12+6x+x^2)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{60}|x|^5\left(1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\ldots\right) = \frac{1}{60}|x|^5 e^{|x|}.$$

111. Weźmy funkcje f i g określone w następujący sposób:

$$f(x) = (x+n-1)\ln(x+n-1)-x\ln x-\ln[(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)],$$
$$g(x) = (x+n)\ln(x+n)-(x+1)\ln(x+1)-\ln[(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)].$$

Wtedy

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-2}\left[\ln(x+k+1)-\ln(x+k)-\frac{1}{x+k}\right],$$
$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln(x+k+1)-\ln(x+k)-\frac{1}{x+k}\right].$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej znajdziemy $\theta = \theta(k) \in (0, 1)$ takie, że

$$\ln(x+k+1)-\ln(x+k) = \frac{1}{x+k+\theta}.$$

Stąd wynika, że $f'(x) > 0$ i $g'(x) < 0$ dla $x > 0$. Pozwala to wywnioskować, że

$$f(x) < \lim_{x\to+\infty} f(x) = n-1$$

oraz

$$g(x) > \lim_{x\to+\infty} g(x) = n-1.$$

Zatem

$$f(x) < n-1 < g(x)$$

dla $x \in (0, +\infty)$ i koniec dowodu.

Rozdział X

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

1. Przyrównując do zera pierwsze pochodne cząstkowe funkcji f, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} f_x = -3x^2+6xy = 0, \\ f_y = 3x^2-4y^3 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ stwierdzamy, że punktami krytycznymi (podejrzanymi o realizację ekstremum) funkcji f są punkty $A(0, 0)$ i $B(6, 3)$.

Zauważmy dalej, że $f_{xx} = -6x+6y$, $f_{xy} = f_{yx} = 6x$, $f_{yy} = -12y^2$. Weźmy wyznacznik

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Wtedy $W(B) = W(6, 3) = 648 > 0$ oraz $f_{xx}(6, 3) = -18 < 0$, zatem w punkcie B f osiąga maksimum lokalne.

Dalej mamy, że $W(A) = W(0, 0) = 0$. Nie rozstrzyga to tego, czy w punkcie A jest ekstremum. Zauważmy jednak, że jeżeli $x < 0$ i $y = 0$, to wtedy $f(x, y) = -x^3 > 0$, a gdy $x = 0$, $y \neq 0$, to $f(x, y) = -y^4 < 0$. Zatem w każdym otoczeniu punktu A funkcja f przyjmuje zarówno wartości mniejsze, jak i większe od $f(A) = 0$. Oznacza to, że f nie ma ekstremum w punkcie A.

2. Ekstremów lokalnych brak.

3. $f_{\min}(0, 0) = 0$.

4. Nie ma ekstremów.

5. $f_{\min}(-2, -1) = -2$.

6. $f_{\min}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{-64}{27}$

7. $f_{\min}(1, -1) = -6$.

8. Ekstremów brak.

9. $f_{\min}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \frac{-4}{3} e^{-2}$.

10. $f_{\min}(0, 0) = 0$.

11. $f_{\min}(0, 0) = 0, f_{\max}(0, 1) = f_{\max}(0, -1) = \frac{2}{e}$.

12. $f_{\min}(-1/\sqrt{10},\ 2/\sqrt{10}) = -\sqrt{5/(2e)}, f_{\max}(1/\sqrt{10},\ 2/\sqrt{10}) = \sqrt{5/(2e)}$.

13. $f_{\min}(1/\sqrt{2e},\ 1/\sqrt{2e}) = f_{\min}(-1/\sqrt{2e},\ -1/\sqrt{2e}) = -1/(2e)$.
$f_{\max}(1/\sqrt{2e},\ -1/\sqrt{2e}) = f_{\max}(-1/\sqrt{2e},\ 1/\sqrt{2e}) = 1/(2e)$.

14. $f_{\min}(1,\ 1) = 3$.

15. $f_{\max}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, gdy $c > 0$ oraz $f_{\min}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) =$
$= -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, gdy $c < 0$. Gdy $c = 0$, to ekstremów brak.

16. $f_{\max}(0,\ 0) = 1$.

17. $f_{\min}(1,\ 2) = 7-10\ln 2$.

18. $f_{\max}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

19. $f_{\min}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}, f_{\max}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

20. Punkty krytyczne funkcji f mają współrzędne:

$$x = \frac{\pi}{12}(-1)^{m+1} + (m+n)\frac{\pi}{2},$$

$$y = \frac{\pi}{12}(-1)^{m+1} + (m-n)\frac{\pi}{2},\quad m,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Funkcja f osiąga maksimum dla m nieparzystego i n parzystego oraz minimum dla m parzystego i n nieparzystego. f nie osiąga ekstremów, gdy m i n są jednakowej parzystości.

21. f osiąga maksimum na prostych $x-y = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz minimum na prostych $x-y = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$, o ile $ab > 0$. Gdy $ab < 0$, to jest na odwrót.

22. $f_{\max}(a,\ a) = 2a^4, f_{\min}(1,\ 0) = f_{\min}(0,\ 1) = -1$.

23. 1° $a > b$. Wtedy $f_{\max}(1,\ 0) = f_{\max}(-1,\ 0) = ae^{-1}$.
2° $a < b$. Wtedy $f_{\max}(0,\ 1) = f_{\max}(0,\ -1) = be^{-1}$.
3° $a = b$. Wtedy $f_{\max}(x,\ y) = ae^{-1}$, o ile $x^2+y^2 = 1$.

24. $f_{\max}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

25. f osiąga minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

26. $f_{\min}(1,\ -1,\ 3) = -11$.

27. $f_{\min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right) = -\frac{17}{4}$.

28. $f_{\min}\left(1,\ -2,\ \frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$.

29. $f_{\max}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$.

30. $f_{\min}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$.

31. $f_{\max}(1/(2\sqrt{3}), 1/(2\sqrt{3}), 1/\sqrt{3}) = \sqrt{3/e}$,
$f_{\min}(1/(2\sqrt{3}), -1/(2\sqrt{3}), 1/\sqrt{3}) = -\sqrt{3/e}$.

32. $f_{\min}\left(\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b}, \frac{1}{4}\sqrt[15]{16a^{14}b}, \frac{1}{2}\sqrt[15]{a^8b^7/4}\right) = \frac{15}{4}a\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$.

33. $f_{\max}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 4$.

34. $f_{\max}\left(\frac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}, \frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}, \frac{c}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}\right) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

35. $V_{\max} = \frac{abc}{\sqrt{3}}$.

36. Trójkąt równoboczny.

37. $x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$, gdzie $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

38. $V_{\max} = \frac{abc}{2}$.

39. $P_{\max} = 2R^2 \sin\alpha$.

40. $V_{\max} = a^3$.

41. Elipsoida ta ma równanie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$.

42. Trójkąt równoramienny.

43. Zastosujemy metodę mnożnika nieoznaczonego Lagrange'a. Wprowadzamy zatem funkcję

$$F(x, y, z, t) = xyzt + \lambda x + \lambda y + \lambda z + \lambda t.$$

Stąd

$$F_x = yzt + \lambda = 0, \qquad F_y = xzt + \lambda = 0,$$
$$F_z = xyt + \lambda = 0, \qquad F_t = xyz + \lambda = 0.$$

Po uwzględnieniu warunku $x+y+z+t = c$ otrzymujemy, że zbiór L rozwiązań tego układu składa się z punktu $\left(\frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}\right)$ oraz z punktów, które otrzymujemy po dokonaniu permutacji współrzędnych punktu $(0, 0, a, c-a)$, gdzie a jest dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $[0, c]$. Ponieważ zbiór S jest zwarty, więc $\max\limits_S f = \max\limits_L f = f\left(\frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}\right) = \frac{c^4}{256}$.

44. Są dwa takie punkty: $A(2, 0, -1)$, $B(-2, 0, -1)$.

Wskazówka: Zastosować metodę mnożnika nieoznaczonego Lagrange'a.

45. a) $f_{\min}(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) = 2a\sqrt{2}$, $f_{\max}(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}) = -2a\sqrt{2}$,

b) ekstremów brak,

c) $f_{\min}\left(\frac{1}{a_1 A}, \frac{1}{a_2 A}, \ldots, \frac{1}{a_n A}\right) = \frac{1}{A}$, gdzie $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{-2}$,

d) wartości ekstremalne f są pierwiastkami równania

$$\frac{l^2}{f-a^2} + \frac{m^2}{f-b^2} + \frac{n^2}{f-c^2} = 0,$$

e) $f_{\max}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$,

f) $f_{\min}\left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \cdot \frac{p}{\alpha}, \ldots, \sqrt{\frac{\alpha_n}{\beta_n}} \cdot \frac{p}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^2}{p}$, gdzie $\alpha = \sqrt{\alpha_1 \beta_1} + \ldots + \sqrt{\alpha_n \beta_n}$,

g) $f_{\min}\left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}\right) = \frac{a^p}{n^{p-1}}$,

h) $f_{\max}\left(\frac{a\alpha_1}{\alpha}, \frac{a\alpha_2}{\alpha}, \ldots, \frac{a\alpha_n}{\alpha}\right) = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_n^{\alpha_n}$,

gdzie $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

46. a) $f(x, y) = 1 + mx + ny + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + mnxy + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \ldots$,

gdzie $|x| < 1$ oraz $|y| < 1$,

b) $f(x, y) = \sum\limits_{\substack{n,m=0 \\ n+m \geqslant 1}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!\,n!} x^m y^n$ dla $|x| + |y| < 1$,

c) $f(x, y) = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n+1}}{m!\,(2n+1)!}$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,

d) $f(x, y) = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m!\,(2n)!}$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,

e) $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,

f) $f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \dfrac{x^m y^n}{mn}$ dla $|x| < 1$ i $|y| < 1$.

47. Z równości $1+xy = k(x-y)$ mamy $y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$, gdzie $F(x, y) = 1+xy-k(x-y)$, a więc $y' = -\dfrac{ky}{x+k}$. Stąd, po uwzględnieniu, że $k = \dfrac{1+xy}{x-y}$ otrzymujemy

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2},$$

a to oznacza zachodzenie żądanej równości.

49. a) $y' = -\dfrac{x+y}{x-y}$, $y'' = \dfrac{2a^2}{(x-y)^3}$,

b) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$, $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$,

c) $y' = \dfrac{1}{1-\varepsilon \cos y}$, $y'' = -\dfrac{\varepsilon \sin y}{(1-\varepsilon \cos y)^3}$,

d) $y' = \dfrac{y}{x}$, $y'' = 0$.

50. a) $z_x = \dfrac{xz}{x^2-y^2}$, $z_y = -\dfrac{y^2}{x^2-y^2}$, $z_{xx} = -\dfrac{y^2 z}{(x^2-y^2)^2}$,
gdzie $z = f(x, y)$.

51. a) Brak punktów ekstremalnych,
b) $z_{\max} = f(0, 0) = 2\sqrt[3]{2}$,
c) $z_{\min} = f(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}) = -4-2\sqrt{6}$,
$z_{\max} = f(\sqrt{6}-3, \sqrt{6}-3) = 2\sqrt{6}-4$,
d) $z_{\min} = f_1(0, 0) = a$, $z_{\max} = f_2(0, 0) = -a$.

52. Mamy:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta.$$

Podobnie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\cos^2\theta - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\theta.$$

Dzieląc obie strony ostatniej równości przez r^2 i dodając ją stronami do równości, która ją poprzedza, otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right),$$

stąd już łatwo otrzymujemy żądaną równość.

55. Potraktujmy $z = z(t, u)$, $v = v(t, u)$, a następnie zróżniczkujemy równość $z = \dfrac{t}{1+tv}$ względem t oraz u. Mamy

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{(1+ut)^2} = \frac{1-t^2\dfrac{\partial v}{\partial t}}{(1+tv)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{-t^2}{(1+tu)^2} = -\frac{t^2}{(1+tv)^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Stąd, po przekształceniach, otrzymujemy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(1+tv)^2}\left(1 - t^2\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1+tu)^2}{(1+tv)^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Teraz, mnożąc pierwszą z ostatnich dwóch równości przez x^2, drugą przez y^2, a następnie dodając je stronami, po odpowiednich przekształceniach, otrzymamy $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$.

56. a) $\dfrac{d^3y}{dt^3} - 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - by = 0$, **b)** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$,

c) $u'' + \left[q(x) - \dfrac{1}{4}p^2(x) - \dfrac{1}{2}p'(x)\right]u = 0$,

d) $\dfrac{d^2u}{dt^2}+(u+3)\dfrac{du}{dt}+2u=0,$

e) $u''-u'-\dfrac{A}{(u-b)^2}=0,$ f) $\dfrac{dr}{d\varphi}=r.$

57. a) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial v},$ b) $\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{1}{z},$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{z}{v}\cdot\dfrac{z^2+u}{z^2-u},$ d) $\dfrac{du}{d\xi}=0,$

e) $\dfrac{3\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}=0,$ f) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$

g) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$ h) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2e^{2u}z=0,$

i) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial z}{\partial v},$ j) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\dfrac{2u}{u^2+v^2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u},$

k) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{1}{u^2-v^2}\left(v\dfrac{\partial z}{\partial u}-u\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)=0.$

60. Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o wartości średniej dla funkcji wielu zmiennych.

61. Wskazówka: Skorzystać z zad. 60.

62. Wskazówka: Skorzystać z zad. 60.

63. Wskazówka: Wyznaczyć ekstremum warunkowe funkcji

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}$$

pod warunkiem $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = a$ oraz $x_1>0,\ x_2>0, \ldots, x_n>0$.

66. $nR^2 \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$.

67. Wskazówka: Obliczyć $\det U$, a następnie wyznaczyć ekstremum warunkowe.

68. Wskazówka: Wyznaczyć kolejno ekstrema warunkowe następujących funkcji:

1° $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$

dla $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ oraz $x_1+x_2+\ldots+x_n=na,$

2° $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i x_j x_k$

dla $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ oraz $x_1 + \ldots + x_n = na$,

$\vdots$

$(n-1)^\circ$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$

dla $x_1 \geqslant 0, \ldots x_n \geqslant 0$ oraz $x_1 + \ldots + x_n = na$.

69. Weźmy funkcję $F(x, y) = y + \frac{1}{2}\sin y - x$. Wtedy $F_y = 1 + \frac{1}{2}\cos y > 0$, co oznacza, że F jest rosnąca względem y przy dowolnie ustalonym x. Ponadto, dla ustalonego x przy dostatecznie dużym $|y|$ mamy $F(x, y) < 0$ dla $y < 0$ oraz $F(x, y) > 0$ dla $y > 0$. Z ciągłości $F(x, y)$ wnioskujemy więc, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno y takie, że $F(x, y) = 0$, co oznacza, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $y + \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie y. Zatem równanie to wyznacza jednoznacznie funkcję uwikłaną $y = f(x), x \in \mathbb{R}$. Stąd

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos f(x)},$$

$$f''(x) = \frac{\sin f(x)}{2\left(1 + \frac{1}{2}\cos f(x)\right)^3}.$$

Dalej, po podstawieniu $y = \pi$ do równania $y + \frac{1}{2}\sin y - x = 0$, otrzymujemy $f(\pi) = \pi$. Stąd $f'(\pi) = 2$, $f''(\pi) = 0$.

70. Niech $F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$ oraz $A(1, 4, 2)$. Wtedy $F(A) = 0$, $F_z(A) = 8 \neq 0$, a zatem (uwzględniając jeszcze, że $F_z = 3z^2 - xy$ jest ciągła w A) są spełnione założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej. Stąd wynika, że równanie $F(x, y, z) = 0$ określa jednoznacznie w pewnym otoczeniu punktu A funkcję uwikłaną $z = f(x, y)$ taką, że $f(1, 4) = 2$. Funkcja ta jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $(1, 4)$ oraz

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left.\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}\right|_{z = f(x, y)} = \frac{y f(x, y)}{3f^2(x, y) - xy}.$$

Dalej

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy \cdot f(x, y)}{[3f^2(x, y) - xy]^3}.$$

Stąd już łatwo znajdujemy, że $\frac{\partial z(1, 4)}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial^2 z(1, 4)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}$.

71. $x''(2) = -\frac{1}{4}$, $y''(2) = \frac{1}{4}$.

72. W równaniu $F(x, y, z) = 0$ podstawmy $z = f(x, y)$. Dalej mamy

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz - 2dx - 2dy - 4dz = 0.$$

Stąd, dla $z \neq 2$, otrzymujemy

$$dz = \frac{x-1}{z-2}\,dx + \frac{y+1}{z-2}\,dy.$$

Z warunku koniecznego dla ekstremum mamy, że $dz = 0$, więc

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{z-2} = 0 \\ \dfrac{y+1}{z-2} = 0, \end{cases}$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} x-1 = 0 \\ y+1 = 0. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $x = 1$, $y = -1$, co po podstawieniu do równania $F(x, y, z) = 0$ daje, że $z^2 - 4z - 12 = 0$. W konsekwencji $z_1 = 2$ lub $z_2 = 6$.

Oznaczmy $A(1, -1, 2)$, $B(1, -1, 6)$. Wtedy $F_z(A) = -8 \neq 0$, $F_z(B) = 8 \neq 0$, dlatego też w otoczeniu punktów A i B są spełnione założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej.

Ponieważ funkcja $F(x, y, z)$ jest dwukrotnie różniczkowalna, więc w pewnym otoczeniu punktów A i B istnieją dwukrotnie różniczkowalne funkcje uwikłane $z = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$. Ponadto, $f_1(1, -1) = -2$, $f_2(1, -1) = 6$. Punkt $(1, -1)$ jest więc punktem podejrzanym o realizację ekstremum dla funkcji f_1 i f_2.

Aby zbadać warunki dostateczne realizacji ekstremum musimy obliczyć różniczki drugiego rzędu dla tych funkcji. Mamy

$$(dx)^2 + (dy)^2 + zd^2z + (dz)^2 - 2d^2z = 0,$$

skąd

$$d^2z = \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2-z}.$$

Teraz, korzystając z faktu, że $dz\,|_{(1,-1)} = 0$, otrzymujemy

$$d^2f_1|_{(1,-1)} = \frac{1}{4}\,[(dx)^2 + (dy)^2],$$

$$d^2f_2|_{(1,-1)} = -\frac{1}{2}\,[(dx)^2 + (dy)^2].$$

Stąd wynika, że $d^2f_1|_{(1,-1)}$ jest formą kwadratową określoną dodatnio, a $d^2f_2|_{(1,-1)}$ jest formą określoną ujemnie. Oznacza to, że funkcja $z = f_1(x, y)$ ma w punkcie $(1, -1)$ minimum lokalne, a funkcja $z = f_2(x, y)$ ma w punkcie $(1, -1)$ lokalne maksimum.

73. **a)** $dz = dx - dy$, $d^2z = 0$,

b) $dz = \dfrac{z}{y(x+z)}(y\,dx + z\,dy)$, $d^2z = \dfrac{1}{(xy-z)^3}(y\,dx - x\,dy)^2$.

74. **a)** $z'(0) = y'(0) = -\dfrac{1}{2}$, $z''(0) = -y''(0) = -\dfrac{3}{4}$,

b) $z'(0) = y'(0) = 1$, $z''(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

76. $w = \dfrac{(x+y)^2}{x^3}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2} + \dfrac{(1+u)^3}{t}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2}$.

78. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$.

80. $$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} + [e^w - 1]\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\right]^2.$$

81. $(a, 0, 0)$, jeżeli $a > b > c > 0$.

82. Weźmy funkcję $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$. Funkcja ta nie ma minimum w punkcie $(0, 0)$, ponieważ $f(0, b) = b^2 > 0$ oraz $f(a, 2a^2) = -a^4 < 0$ dla dowolnych niezerowych a i b.

Biorąc teraz zacieśnienie funkcji f do osi Ox mamy

$$g(x) = f(x, 0) = -3x^4,$$

zatem $g_{\min}(0) = 0$. Natomiast funkcja $h(y) = f(0, y) = y^2$ (zacieśnienie funkcji f do osi Oy) ma minimum w punkcie 0 oraz $g_{\min}(0) = 0$.

W końcu, weźmy zacieśnienie funkcji f do prostej $y = mx$, gdzie $0 < |m| < \infty$:

$$k(x) = f(x, mx) = m^2x^2 - 4mx^3 - 3x^4.$$

Funkcja k ma minimum lokalne w punkcie $x = 0$.

83. Wskazówka: Porównaj rozwiązanie zad. 82.

84. Czytelnik sprawdzi, czy funcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{y^2}e^{-x^2/y} & \text{dla } y > 0 \\ 0 & \text{dla } y = 0, \end{cases}$$

spełnia warunki z naszego zadania dla $a = 0$, $b = 1$.

85. Z warunku koniecznego dla istnienia ekstremum funkcji f otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} ax_2 - x_1^2 = 0 \\ x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} \cdot x_n - x_{n-1}^2 = 0 \\ x_{n-1} b - x_n^2 = 0. \end{cases}$$

Stąd wynika, że liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają układ

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a} = \dfrac{x_2}{x_1} \\ \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_3}{x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \dfrac{x_n}{x_{n-1}} \\ \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{b}{x_n}. \end{cases}$$

Przyjmując $\dfrac{x_1}{a} = q$, układ ten sprowadzamy do postaci:

$$\begin{cases} x_1 = qa \\ x_2 = x_1 q \\ \vdots \\ x_n = q x_{n-1} \\ b = q x_n \end{cases}$$

Stąd $q^{n+1} a = b$, a więc $q = \sqrt[n+1]{b/a}$.

W konsekwencji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[n+1]{ba^n}, \\ x_2 &= \sqrt[n+1]{b^2 a^{n-1}}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \sqrt[n+1]{b^{n-1} a^2}, \\ x_n &= \sqrt[n+1]{b^n a}. \end{aligned}$$

Zatem dla $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ otrzymujemy

$$f(M) = \frac{1}{\left(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b}\right)^n}.$$

Nietrudno też pokazać, że dla $P(y_1, y_2, \dots, y_n)$ takiego, że $y_i \in (a, b)$ **dla** $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $P \neq M$, zachodzi

$$f(P) < f(M).$$

86. Jeżeli wielokąt jest wpisany w koło o promieniu R, to jego pole wyraża się wzorem

$$P = \frac{1}{2} R^2(\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n + \sin x_{n+1}),$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ są kątami środkowymi, na których są oparte boki $n+1$-kąta. Oczywiście $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 2\pi$. Stąd otrzymujemy, że pole $n+1$-kąta można wyrazić wzorem

$$P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} R^2[\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n + \sin(x_1 + \ldots + x_n)],$$

gdzie

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 2\pi.$$

Zatem nasze zadanie sprowadza się do wyznaczenia maksimum funkcji P.

Z warunku koniecznego dla maksimum otrzymujemy

$$\begin{cases} \cos x_1 - \cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0, \\ \cos x_2 - \cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0, \\ \vdots \\ \cos x_n - \cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0. \end{cases}$$

Można pokazać, że jedynym rozwiązaniem powyższego układu, spełniającym wskazane ograniczenia, jest

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{2\pi}{n+1},$$

skąd również $x_{n+1} = \dfrac{\pi}{n+1}$.

Należy teraz pokazać, że w tym punkcie, tzn. w punkcie $\left(\dfrac{\pi}{2\pi+1}, \dfrac{\pi}{2n+1}, \ldots, \dfrac{\pi}{2n+1}\right)$ funkcja $P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ osiąga maksimum. Dowód tego faktu, wraz ze wskazówką, że należy posłużyć się zasadą indukcji matematycznej, pozostawiamy Czytelnikowi.

87. $x = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{d}$, $y = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{d}$, $z = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i}{d}$, gdzie

$$d = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}.$$

88. $\left(\cos(1/\sqrt{n})\right)^n$.

Wskazówka: Zastosować metodę czynnika nieoznaczonego Lagrange'a.

90. $f'(0) = 0$, $f''(0) = \frac{2}{3}$.

Wskazówka: Zastosować twierdzenie o funkcji uwikłanej do funkcji $F(x, y) = x^2 - xy + 2y + x - y - 1$.

91. Po skorzystaniu z założeń otrzymujemy

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_a^b K(x+h, y)\,dy - \int\limits_a^b K(x, y)\,dy}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \int\limits_a^b \frac{K(x+h, y) - K(x, y)}{h}\,dy = \int\limits_a^b K_x(x, y)\,dy.$$

92. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej dla całki, otrzymujemy

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_a^{x+h} K(x+h, y)\,dy - \int\limits_a^b K(x, y)\,dy}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_a^{x+h} K(x+h, y)\,dy}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_a^x [K(x+h, y) - K(x, y)]\,dy}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} K(x+h, x(\theta_h)) + \int\limits_a^x \lim_{h\to 0} \frac{K(x+h, y) - K(x, y)}{h}\,dy =$$

$$= K(x, x) + \int\limits_a^x K_x(x, y)\,dy,$$

gdzie $x(\theta_h) \in (x, x+h)$.

ROZDZIAŁ XI

RÓWNANIA FUNKCYJNE

1. Po podstawieniu $y = \frac{x}{1+x}$ otrzymujemy $f(y) = \frac{y^2}{(y-1)^2}$ dla $y \neq 1$ oraz $f(1) =$ dowolna liczba.

2. Zauważmy, że $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2$, skąd $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$. Podstawiając w naszym równaniu $x+\frac{1}{x} = y$, otrzymujemy teraz

$$f(y) = y^2-2$$

dla $y \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ (dlaczego?). W przedziale $(-2, 2)$ funkcja f może być zadana dowolnie.

3. Ponieważ lewa strona jest symetryczna względem x i y, więc otrzymujemy stąd $x+f(y) = y+f(x)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Po podstawieniu w tej równości $y = 0$ i oznaczeniu $a = f(0)$, otrzymujemy $f(x) = x+a$. Podstawiając tę funkcję do równania wyjściowego, otrzymujemy

$$x+y+xy+4a = x+y+a,$$

skąd $xy+3a = 0$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Sprzeczność.

4. Po podstawieniu do równania $2f(x)+f(1-x) = x$ w miejsce x liczby $1-x$ otrzymujemy $2f(1-x)+f(x) = 1-x$. Obliczając z pierwszego równania $f(1-x)$ i wstawiając do drugiego, otrzymujemy $f(x) = x-\frac{1}{3}$. Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia zadane równanie.

5. Z symetrii prawej strony względem x i y otrzymujemy

$$f\big(f(x)+y\big) = f\big(f(y)+x\big).$$

Stąd i z różnowartościowości funkcji f wynika, że

$$f(x)+y = f(y)+x$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Przyjmując teraz $y = 0$ i oznaczając $f(0) = a$, otrzymujemy $f(x) = x + a$.

Podstawiając tę funkcję do naszego równania mamy

$$x + y + 2a = x + y + a + 1,$$

skąd $a = 1$. Zatem funkcja $f(x) = x + 1$ jest jedynym rozwiązaniem zadanego równania funkcyjnego w klasie funkcji różnowartościowych.

6. Zarówno w rozwiązaniu tego zadania, jak też i później będziemy korzystać z następującego lematu.

Lemat. *Niech D będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$ takim, że $0 \in D$. Niech $f: \mathbb{R} \to D$ będzie taka, że*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy:

1° $f(0) = 0$,

2° $f(nx) = nf(x)$ *dla* $x \in \mathbb{R}$ *oraz dla* $n \in \mathbb{N}$.

Pomijamy prosty dowód tego lematu.

Przejdźmy teraz do naszego zadania. Zauważmy najpierw, że funkcja $f \equiv 0$ spełnia nasze równanie. Przypuśćmy, że istnieje f, która nie jest tożsamościowo równa zeru i taka, że $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ oraz f spełnia zadane równanie. Wtedy istnieje $x_0 \neq 0$ (zob. lemat) takie, że $f(x_0) \neq 0$. Oczywiście $f(x_0) \in \mathbb{Z}$. Korzystając z lematu dobierzmy liczbę naturalną n taką, że $n > |f(x_0)|$. Mamy:

$$f(x_0) = f\left(n\frac{x_0}{n}\right) = nf\left(\frac{x_0}{n}\right),$$

skąd $f\left(\frac{x_0}{n}\right) = \frac{f(x_0)}{n}$. Ale $\frac{f(x_0)}{n} \notin \mathbb{Z}$ i sprzeczność. Zatem $f \equiv 0$ jest jedynym rozwiązaniem naszego równania.

7. Wykorzystując symetrię lewej strony równania, otrzymujemy

$$x^2 f(y) + yf(x) = y^2 f(x) + xf(y).$$

Po podstawieniu $y = 2$ i skorzystaniu z warunku 2° mamy

$$f(x) = x^2 - x.$$

Łatwo sprawdzić, że ta funkcja spełnia zadane równanie.

8. $f(x) = x^3 - x^2 - x$.

Wskazówka: Porównać rozwiązanie zad. 7.

9. Przyjmując $x = 1$ oraz $x = -3$, otrzymujemy, że $W(0) = 0$ i $W(-2) = 0$. Zatem W ma postać: $W(x) = x(x+2)Q(x)$. Wstawiając do naszego równania, otrzymujemy

$$(x-1)(x+1)(x+3)Q(x+1) - (x+3)(x-1)(x+1)Q(x-1) = 0$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a więc $Q(x+1) = Q(x-1)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że $Q(x) = a$ dla $x \in \mathbb{R}$ (wielomian stały), a więc $W(x) = ax^2 + 2ax$ dla $x \in \mathbb{R}$.

10. Weźmy dowolne $t \in \mathbb{R}$ i podstawmy w naszym równaniu $x = y = \frac{t}{2}$. Wtedy otrzymujemy $f(t) = \left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2$, skąd wynika, że f przyjmuje tylko wartości rzeczywiste nieujemne. Więc f nie może być surjekcją.

11. Załóżmy, że f jest funkcją spełniającą równanie Cauchy'ego. Oznaczmy $a = f(1)$ i zauważmy (korzystamy tutaj z lematu znajdującego się w rozwiązaniu zad. 6), że f jest funkcją nieparzystą. Rzeczywiście, po podstawieniu do równania $y = -x$ mamy: $0 = f(0) = f(x-x) = f(x)+f(-x)$, skąd $f(-x) = -f(x)$. Zauważmy dalej, że

$$f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1) = na,$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dalej, dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ mamy

$$f(m) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right),$$

skąd

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} f(m) = \frac{m}{n} \cdot a.$$

Stąd i z nieparzystości funkcji f wnioskujemy, że dla dowolnej liczby wymiernej r zachodzi

$$f(r) = ra.$$

Zauważmy, że do tej pory nie korzystaliśmy z ciągłości funkcji f.

Ustalmy teraz dowolnie liczbę rzeczywistą x oraz weźmy ciąg $\{r_n\}$ liczb wymiernych zbieżny do x. Wtedy (ciągłość f) mamy:

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n a = ax.$$

Zatem każda funkcja ciągła spełniająca równanie Cauchy'ego jest funkcją postaci $f(x) = ax$.

12. Oznaczmy $c = f(0)$. Podstawmy teraz w równaniu $y = 0$; mamy

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2} = \frac{f(x)+c}{2}.$$

Stąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+c}{2},$$

co w konsekwencji daje

$$f(x)+f(y) = f(x+y)+c.$$

Wprowadzając teraz funkcję pomocniczą $g(x) = f(x)-c$, z ostatniej równości, otrzymujemy

$$g(x+y) = g(x)+g(y).$$

Oczywiście g jest funkcją ciągłą, więc (zob. rozwiązanie zad. 11) wnioskujemy, że $g(x) = ax$, gdzie a jest pewną stałą. Zatem, każde ciągłe rozwiązanie równania Jensena jest funkcją postaci $f(x) = ax+c$, gdzie a i c są dowolnymi stałymi.

13. Istnieje wiele sposobów rozwiązania tego równania. Jeden z najprostszych polega na wprowadzeniu funkcji pomocniczej $g(x) = f(x)+1$. Mamy wtedy:

$$g(x+y) = f(x+y)+1 = f(x)+f(y)+f(x)\cdot f(y)+1 =$$
$$= (f(x)+1)(f(y)+1) = g(x)g(y).$$

Otrzymane w ten sposób równanie funkcyjne będziemy rozpatrywać w zad. 15.

Podamy teraz inny sposób rozwiązania naszego równania funkcyjnego, bazujący na ideach użytych w rozwiązaniu zad. 11. Po podstawieniu do naszego równania $x = y$, otrzymujemy

$$f(2x) = 2f(x)+(f(x))^2 = [f(x)+1]^2-1.$$

Dalej, dla $y = 2x$ otrzymujemy:

$$f(3x) = f(x)+f(2x)+f(x)\cdot f(2x) =$$
$$= 3f(x)+(f(x))^2+2(f(x))^2+(f(x))^3 =$$
$$= (f(x))^3+3(f(x))^2+3f(x) = [f(x)+1]^3-1.$$

Stosując zasadę indukcji matematycznej łatwo już dowieść, że

$$(1)\quad f(nx) = [f(x)+1]^n-1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Po podstawieniu teraz do naszego równania w miejsce x liczby $\frac{x}{2}$ i w miejsce y liczby $\frac{x}{2}$, otrzymujemy

$$(2)\quad f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)+1\right]^2-1 \geqslant -1.$$

Po podstawieniu teraz do (1) najpierw $x = 1$, a później $x = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$, otrzymujemy

$$f(n) = (1+f(1))^n-1,$$
$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (1+f(1))^{\frac{m}{n}}-1.$$

Rozważmy dalej dwa przypadki:

1° $f(1) = -1$.

Wtedy z naszego równania otrzymujemy

$$f(x) = f(1+(x-1)) = f(1)+(1+f(1))f(x-1) = -1.$$

Zatem $f(x) = -1$ dla $x \in \mathbb{R}$.

2° $f(1) \neq -1$. Na podstawie (2) oznacza to, że $f(1) > -1$. Oznaczając wtedy $c = \ln(1+f(1))$, otrzymujemy:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = e^{cm/n} - 1.$$

Ponieważ f jest ciągła, więc przez przejście graniczne (zob. rozwiązanie zad. 11) wnioskujemy, że

$$f(x) = e^{cx} - 1, \ x \geqslant 0.$$

W szczególności $f(0) = 0$. Dalej, podstawiając w równaniu $y = -x$, mamy

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x) + f(x) \cdot f(-x),$$

skąd dla $x < 0$ otrzymujemy

$$f(x) = \frac{-f(-x)}{1+f(-x)} = \frac{1-e^{-cx}}{e^{-cx}} = e^{cx} - 1.$$

Ostatecznie pokazaliśmy, że funkcje $f \equiv -1$ oraz $f(x) = e^{cx} - 1$ ($c = \text{const}$) są jedynymi ciągłymi rozwiązaniami naszego równania funkcyjnego.

14. Po podstawieniu kolejno w równaniu w miejsce x liczby $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \ldots$ otrzymujemy

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{4},$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{8},$$

więc

$$f(x) = f\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + \frac{x}{2^4} + \frac{x}{2^2}.$$

Ogólnie

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2^n} + x \cdot 2^{-2n} + x \cdot 2^{-2n+2} + \ldots + x \cdot 2^{-4} + x \cdot 2^{-2} =$$

$$= f(x \cdot 2^{-n}) \cdot 2^{-n} + x[2^{-2n}(1+2^2+\ldots+(2^2)^{n-1}] =$$

$$= f(x \cdot 2^{-n}) \cdot 2^{-n} + \frac{x}{3}(1-2^{-2n}).$$

Stąd, wykorzystując założoną ciągłość funkcji f w zerze otrzymujemy, że $f(x) = \frac{x}{3}$.

Można sprawdzić, że ta funkcja spełnia nasze równanie.

15. Z rozwiązania zad. 10 wynika, że każda funkcja f, spełniająca zadane równanie funkcyjne, przyjmuje tylko wartości rzeczywiste nieujemne. Gdyby funkcja f przyjmowała w pewnym punkcie x_0 wartość 0, to wtedy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ byłoby

$$f(x) = f\big((x-x_0)+x_0\big) = f(x-x_0)\cdot f(x_0) = 0,$$

zatem f byłaby tożsamościowo równa zeru. Stąd i na podstawie poprzedniej uwagi mamy więc, że $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Teraz, logarytmując nasze równanie stronami, otrzymujemy

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Zatem funkcja $g(x) = \ln f(x)$ spełnia równanie Cauchy'ego i z rozwiązania zad. 11 wynika, że $g(x) = cx$. Stąd $f(x) = e^{cx}$. Z założenia, $a = f(1) = e^c$, więc $c = \ln a$. Zatem $f(x) = e^{x\ln a} = a^x$.

16. Niech $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ spełnia zadane równanie. Ustalmy dowolnie $x, y \in (0, \infty)$ i oznaczmy $u = \ln x$, $v = \ln y$. Wprowadźmy funkcję pomocniczą $g(u) = f(e^u)$.

Teraz, z naszego równania mamy:

$$f(xy) = f(e^u \cdot e^v) = f(e^{u+v}) = g(u+v),$$
$$f(x)+f(y) = f(e^u)+f(e^v) = g(u)+g(v),$$

a więc

$$g(u+v) = g(u)+g(v).$$

Zatem g spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego (por. zad. 11). Jest to także funkcja ciągła (jako złożenie funkcji ciągłych). Z rozwiązania zad. 11 wynika więc, że $g(u) = au$ ($a = \text{const}$). Zatem $f(x) = a \cdot u = a \ln x$.

17. $f(x) = x^c$, $c = \text{const}$.

Wskazówka: Skorzystać z rozwiązania zad. 16 wprowadzając funkcję pomocniczą identycznie jak w tym rozwiązaniu.

18. Wprowadźmy funkcję pomocniczą $g(x) = a^{-x^2/2} \cdot f(x)$. Jest to oczywiście funkcja ciągła. Mamy:

$$f(x+y) = a^{(x+y)^2/2}\, g(x+y),$$
$$a^{xy} f(x) f(y) = a^{xy} \cdot a^{x^2/2} \cdot a^{y^2/2} g(x) g(y) = a^{(x+y)^2/2}\, g(x) \cdot g(y).$$

Stąd, uwzględniając nasze równanie otrzymujemy, że

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y).$$

Z rozwiązania zad. 15 wynika, że $g(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ lub $g(x) = \big(g(1)\big)^x$. Zatem $f \equiv 0$ lub $f(x) = a^{x^2/2} \cdot \big(g(1)\big)^x = a^{(x^2/2)+cx}$, gdzie a i c są pewnymi stałymi.

19. Pozostawiamy Czytelnikowi dowód w przypadku 1°; należy pokazać, że f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i skorzystać z zad. 11.

Załóżmy teraz, że f spełnia równanie Cauchy'ego i jest ograniczona z góry przez np. liczbę M na pewnym przedziale (a, b), tzn. $f(x) \leqslant M$ dla $x \in (, b)$. Weźmy funkcję $g(x) = f(x) - f(1)x$. Z nierówności: $g(x) \leqslant |g(x)| \leqslant |f(x)| + |f(1)|\,|x| \leqslant$ $\leqslant M + |f(1)| \max\{|a|, |b|\} = M_1$ wynika, że g jest ograniczona z góry na (a, b). Ponadto, jak łatwo sprawdzić, $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Korzystając z rozwiązania zad. 11 otrzymujemy, że $g(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{Q}$.

Zauważmy też, że g jest ograniczona z góry na $\mathbb{R}$. Rzeczywiście, dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ znajdźmy liczbę $r \in \mathbb{Q}$ taką, że $x + r \in (a, b)$. Wtedy $g(x) =$ $= g(x) + g(r) = g(x+r) \leqslant M_1$.

Pokażemy teraz, że g jest tożsamościowo równa zeru na $\mathbb{R}$. Gdyby tak nie było, to dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$ byłoby, że $g(x_0) \neq 0$. Ale wówczas $g(x_0) + g(r - x_0) = g(r) = 0$ dla dowolnie ustalonej liczby wymiernej. Wtedy jedna z liczb $g(x_0)$ i $g(r - x_0)$ jest dodatnia. Gdyby $g(x_0) > 0$, wtedy dla n odpowiednio dużych byłoby, że $g(nx_0) = ng(x_0) > M_1$, co jest sprzeczne. Podobnie wnioskujemy w przypadku, gdyby $g(x_0 - r) > 0$.

Ostatecznie $g(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ czyli $f(x) = f(1) \cdot x = ax$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Dowód w przypadku 3° pozostawiamy Czytelnikowi; radzimy ten przypadek sprowadzić do przypadku 2°.

20. Łatwo sprawdzić, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, spełnia podane w zadaniu warunki. Pokażemy, że jest to jedyna funkcja.

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieje funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca podane warunki, która nie jest tożsamością, tzn. istnieją liczby α i β różne od zera (dlaczego?), $\alpha \neq \beta$ i takie, że $g(\alpha) = \beta$. Wtedy z 1° (por. również rozwiązanie zad. 11) mamy:

$$g(\alpha - \beta) = g(\alpha) - g(\beta).$$

Z drugiej strony, wykorzystując warunek 2°, otrzymujemy

$$g\big(g(\alpha)\big) = g(\beta) = \alpha,$$

więc

$$g(\alpha - \beta) = \beta - \alpha.$$

Oznaczmy $\delta = \alpha - \beta$. Wtedy oczywiście mamy, że $g(\delta) = -\delta$. Wiemy, że $\delta \neq 0$. Niech np. $\delta > 0$. Wtedy, korzystając z 2° mamy

$$-\delta = g(\delta) = g\big(\sqrt{\delta} \cdot \sqrt{\delta}\big) = \big(g(\sqrt{\delta})\big)^2 \geqslant 0$$

i sprzeczność.

21. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ według definicji jednostajnej ciągłości.

Dalej zauważmy, że wykorzystując zadane równanie funkcyjne, dla dowolnie ustalonej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ mamy:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \ldots$$

Weźmy zatem $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \neq y$. Dobierzmy $n \in \mathbb{N}$ takie, żeby $\dfrac{x}{2^n} < \delta$ i $\dfrac{y}{2^n} < \delta$. Wtedy $\left|\dfrac{x}{2^n} - \dfrac{y}{2^n}\right| < \delta$, a więc

$$|f(x)-f(y)| = \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)-f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right| < \varepsilon,$$

co wobec dowolności ε daje $f(x) = f(y)$. Zatem f jest funkcją stałą.

22. Ustalmy $x > 0$ i zadajmy funkcję $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ w opisany niżej sposób. Mianowicie, niech a będzie zadaną liczbą. Podstawiamy:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \ldots = a,$$
$$f(2x) = f(4x) = \ldots = f(2^n x) = \ldots = a.$$

Niech dalej funkcja f będzie zadana w przedziale $\left[\frac{x}{2}, x\right]$ w dowolny sposób jako funkcja niestała, ale ciągła. Przedłużmy tę funkcję na przedział $\left[\frac{x}{4}, \frac{x}{2}\right]$ przyjmując, że $f(y) = f(2y)$ dla $y \in \left[\frac{x}{4}, \frac{x}{2}\right]$. Teraz analogicznie określamy ją w przedziale $\left[\frac{x}{8}, \frac{x}{4}\right]$ itd. Później określamy f w przedziale $[x, 2x]$ przyjmując $f(y) = f\left(\frac{y}{2}\right)$, dla $y \in [x, 2x]$ itd.

W ten sposób określona funkcja spełnia podane w zadaniu warunki.

Zauważmy również, że funkcje spełniające podane w zadaniu warunki mogą być opisane za pomocą konkretnych wzorów. Np. jeżeli F jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$ o okresie równym 1, to funkcja $f(x) = F(\log_2 x)$ spełnia warunki zadania.

23. Dzieląc obie strony równania $g(2x) = 2g(x)$ przez $2x$ $(x \neq 0)$ otrzymujemy $\frac{g(2x)}{2x} = \frac{g(x)}{x}$. Weźmy teraz funkcję pomocniczą $h(x) = \frac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Wtedy funkcja ta spełnia na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ podane w zad. 22 równanie funkcyjne $h(2x) = h(x)$. Niech więc $h(x)$ będzie funkcją ciągłą i niestałą na przedziale $(0, \infty)$, spełniającą to równanie funkcyjne. Wtedy funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $g(0) = 0$ oraz $g(x) = xh(|x|)$ dla $x \neq 0$ spełnia żądane w zadaniu warunki.

24. Niech $f\colon X \to X$ będzie funkcją spełniającą zadane równanie funkcyjne. Oznaczmy $Y = f(X)$. Weźmy dowolny element $x \in X$. Wtedy $f(x) \in Y$. Oznaczmy $y = f(x)$. Wtedy, korzystając z faktu, że f spełnia podane równanie, mamy

$$f(y) = f(f(x)) = f(x) = y.$$

Zatem funkcja f jest funkcją postaci:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in Y \\ \text{dowolny element z } Y & \text{dla } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Zatem, ogólną postać funkcji $f\colon X \to X$ spełniającej nasze równanie otrzymamy biorąc dowolny niepusty podzbiór Y zbioru X i określając f jak wyżej.

25. Wystartujemy od następującego lematu.

Lemat. *Jeżeli* $|f(x)| \leqslant 1$, *to* $|f(3x)| \leqslant 1$.

W celu udowodnienia rozważmy w przedziale $[-1, 1]$ funkcję $g(x) = 3x-4x^3$. Mamy: $g(-1) = 1$, $g(1) = -1$, $g'(x) = 3-12x^2$, skąd już łatwo wynika, że $|g(x)| \leqslant 1$ dla $x \in [-1, 1]$.

Jeżeli więc $|f(x)| \leqslant 1$, to $|f(3x)| = |3f(x)-4(f(x))^3| = |g(f(x))| \leqslant 1$. Kończy to dowód lematu.

Teraz zauważmy, że po podstawieniu w naszym równaniu funkcyjnym $x = 0$ otrzymamy: $f(0) = 3f(0)-4(f(0))^3$. Stąd $f(0) = 0$ lub $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $f(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Zawsze więc $|f(0)| < 1$. Z ciągłości f w zerze wynika, że istnieje otoczenie $(-d, d)$ punktu 0 takie, że dla $x \in (-d, d)$ mamy $|f(x)| \leqslant 1$.

Niech teraz t będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Dobierzmy $n \in \mathbb{N}$ takie, żeby $\frac{t}{3^n} \in (-d, d)$. Wtedy $\left|f\left(\frac{t}{3^n}\right)\right| \leqslant 1$. Korzystając z lematu mamy, że $\left|f\left(\frac{t}{3^{n-1}}\right)\right| \leqslant 1$, $\left|f\left(\frac{t}{3^{n-2}}\right)\right| \leqslant 1$ itd., wreszcie $|f(t)| \leqslant 1$.

26. a) Podstawiając kolejno w naszym równaniu w miejsce x liczby $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \ldots$, otrzymamy przez prostą indukcję, że

$$f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{nx}{2}.$$

Zatem, gdyby f była dodatnia na pewnym przedziale $(0, \alpha)$, to dla dowolnej ustalonej liczby $x > 0$ znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{x}{2^n} \in (0, \alpha)$ dla $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd mamy

$$f(x) \geqslant \frac{nx}{2}.$$

Jeżeli $n \to \infty$, to mielibyśmy $f(x) = +\infty$. Sprzeczność.

b) Czytelnik sam przeprowadzi dowód, naśladując powyższe rozumowanie.

c) Można sprawdzić, że funkcja $f(x) = \frac{x \ln |x|}{2 \ln 2}$ dla $x \neq 0$, $f(0) = 0$, jest rozwiązaniem (ciągłym) naszego równania.

27. $f(x)$ jest ilorazem dwóch wielomianów, $f(x) = \frac{W_m(x)}{W_n(x)}$, przy czym, jeśli $n > m$, to $W_n(x)$ jest dowolnym wielomianem symetrycznym, a $W_m(x)$ jest również wielomianem symetrycznym o tej własności, że najniższy stopień, który w nim występuje jest równy $n-m$.

Jeżeli natomiast $n < m$, to jest dokładnie na odwrót. Czytelnik sprawdzi, że istotnie tak jest.

28. Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje y_0 takie, że $|g(y_0)| = a > 1$. Oznaczmy $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Zgodnie z założeniem $M = 1$. Istnieje oczywiście x_0 takie, że $|f(x_0)| > \frac{M}{a}$ $\left(\text{bo } \frac{M}{a} < M\right)$. Oznaczmy dalej $u = f(x_0 + y_0)$, $v = f(x_0 - y_0)$. Wtedy $|u+v| = 2|f(x_0) \cdot g(y_0)| > 2a \cdot \frac{M}{a} = 2M$, skąd wynika, że $|u| > M$ lub $|v| > M$. Jest to jednak niemożliwe. Sprzeczność i koniec dowodu.

29. Zauważmy, że $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) + 2 = 4 = 2^2$, Metodą indukcji matematycznej łatwo sprawdzić, że $f(n) = n^2$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dalej mamy: $n^2 = f(n) = f\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\right) = f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{2}\right) + 2 \cdot \frac{n^2}{4} = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^2}{2}$.

Stąd $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4} = \left(\frac{n}{2}\right)^2$.

Załóżmy, że dla dowolnie ustalonych liczb $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f\left(\frac{n}{2^k}\right) = \left(\frac{n}{2^k}\right)^2$. Wtedy

$$\left(\frac{n}{2^k}\right)^2 = f\left(\frac{n}{2^k}\right) = f\left(\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{n}{2^{k+1}}\right) = 2f\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^k}\right)^2.$$

Stąd $f\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right) = \left(\frac{n}{2^{k+1}}\right)^2$. Zatem, na mocy zasady indukcji, $f\left(\frac{n}{2^k}\right) = \left(\frac{n}{2^k}\right)^2$ dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$.

Teraz, oznaczmy przez D zbiór liczb postaci $\frac{n}{2^k}$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$. Pokazaliśmy, że $f(x) = x^2$ dla $x \in D$. Załóżmy więc, że $x \in \mathbb{R}_+ \setminus D$. Weźmy $x_1 \in D$, $x_1 < x$. Wtedy istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{2^m} < x - x_1$. Niech l będzie największą liczbą naturalną taką, że $x_1 + \frac{l}{2^m} < x$. Zauważmy, że $x_2 = x_1 + \frac{l}{2^m} \in D$. Oczywiście $0 < x - x_2 < \frac{1}{2^m}$. Istnieje liczba naturalna s taka, że $\frac{1}{2^s} < x - x_2$. Oczywiście $s > m$. Niech p będzie największą liczbą naturalną taką, że $x_2 + \frac{p}{2^s} < x$. Liczba $x_3 = x_2 + \frac{p}{2^s}$ należy do D oraz $0 < x - x_3 < \frac{1}{2^s} \leqslant \frac{1}{2^{m+1}}$. Postępując tak dalej otrzymamy ciąg $\{x_p\}$ liczb należących do D i takich, że

$$0 < x - x_p < \frac{1}{2^{m+p-2}}, \text{ dla } p \geqslant 2.$$

Stąd wynika, że $\lim_{p\to\infty} x_p = x$. Ponieważ $f(x_p) = x_p^2$, więc z założenia o ciągłości funkcji f wynika, że $f(x) = x^2$ dla każdego $x\in\mathbb{R}_+$. Stąd dla $x > 0$ mamy:

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f(x-x) = f(x)+f(-x)-2x^2 = \\ &= x^2+f(-x)-2x^2 = f(-x)-x^2. \end{aligned}$$

Zatem $f(-x) = x^2 = (-x)^2$. Wykazaliśmy więc, że jedynie funkcja $f(x) = x^2$ spełnia warunki zadania.

30. Dla $z \geqslant 2$ mamy $f(z) = f\big((z-2)f(z)\big)f(2) = 0$. Zatem $f(z) \equiv 0 \Leftrightarrow z \geqslant 2$. Dla $0 \leqslant y < 2$ mamy:

$$\begin{aligned} & x \geqslant 2-y \Leftrightarrow x+y \geqslant 2 \Leftrightarrow f(x+y) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow f\big(xf(y)\big)\cdot f(y) = 0 \Leftrightarrow f\big(xf(y)\big) = 0 \Leftrightarrow xf(y) \geqslant 2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \geqslant \frac{2}{f(y)}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $2-y = \dfrac{2}{f(y)}$ dla $0 \leqslant y < 2$. Zatem funkcja f musi być dana wzorem

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y} & \text{dla} \quad y\in[0,2) \\ 0 & \text{dla} \quad y \geqslant 2. \end{cases}$$

Pozostaje tylko sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

31. Weźmy dowolne $x, y > 0$. Niech f spełnia podane w zadaniu warunki. Dzieląc obie strony naszego równania przez xy otrzymujemy $\dfrac{f(xy)}{xy} = \dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{f(y)}{y}$. Określmy funkcję $g\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Wtedy $g(xy) = g(x)+g(y)$ dla $x, y\in(0,\infty)$ oraz g jest funkcją ciągłą. Z rozwiązania zad. 16 wynika więc, że $g(x) = c\ln x$, $x > 0$ i dalej, że $f(x) = cx\ln x$, dla $x > 0$. Ponieważ $f(1) = 0$, więc $0 = f(1) = f\big((-1)(-1)\big) = -f(-1)-f(-1) = -2f(-1)$, skąd $f(-1) = 0$. Stąd $f(-x) = f\big(x(-1)\big) = -f(x)+xf(-1) = -f(x)$. Zatem $f(x) = cx\ln|x|$ dla $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ponadto z równania otrzymujemy, że $f(0) = 0$. Teraz z warunku 3° otrzymujemy $c = 1$, zatem

$$f(x) = \begin{cases} x\ln|x| & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

32. Ustalmy $y \neq 0$. Wtedy, przekształcając nasze równanie, otrzymujemy $f'(x) = \dfrac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}$. Stąd widać, że funkcja $f'(x)$ jest różniczkowalna. Zatem, dla $y \neq 0$ zachodzi

$$f''(x) = \frac{f'(x+y)-f'(x-y)}{2y}.$$

Stąd, poprzez indukcję wnioskujemy, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Różniczkując teraz nasze równanie względem x mamy

$$2f'(x) = f'(x+y)+f'(x-y).$$

Przyjmując $y = x$ mamy

$$2f'(x) = f'(2x)+f'(0)$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Stąd

$$f''(x) = f''(2x).$$

Teraz, po podstawieniu w pierwszej z otrzymanych równości $y = x$ otrzymujemy

$$2xf''(x) = f'(2x)-f'(0)$$

i dalej

$$2f''(x)+2xf^{(3)}(x) = 2f''(2x).$$

Stąd i z otrzymanej wcześniej równości $\left(f''(x) = f''(2x)\right)$ otrzymujemy

$$2f''(x)+2xf^{(3)}(x) = 2f''(x),$$

a więc $f^{(3)}(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem $f(x) = ax^2+bx+c$ dla $x \in \mathbb{R}$ (a, b, c — dowolne stałe).

33. Ustalmy dowolnie x z otoczenia, o którym mowa w założeniu. Weźmy y dostatecznie małe. Odejmując od obydwu stron równania $f(x)$ i następnie dzieląc otrzymane równanie przez y, otrzymujemy

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y}\,\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(y)}.$$

Stąd

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)-f(0)}{y}\,\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(y)}.$$

Jeżeli $y \to 0$, to z powyższej równości otrzymamy

$$f'(x) = C\left(1+f^2(x)\right).$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe i uwzględniając warunek początkowy $f(0) = 0$, otrzymujemy

$$f(x) = \operatorname{tg} cx.$$

34. Równanie to spełnia $f \equiv 0$. Załóżmy, że f nie jest taką funkcją. Wtedy można pokazać (Czytelnik zechce uzupełnić ten fragment dowodu), że $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ f jest ciągła, więc jest stale dodatnia lub ujemna. Można zatem określić: $h(x) = \ln|f(x)|$. Wtedy $h(x)+h(y) = h\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)+h\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$. Stąd, różniczkując tę równość względem x, otrzymujemy: $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} h'\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} h'\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$. W szczególności, (biorąc $x = y = 0$) otrzymujemy $h'(0) = 0$. Ponadto, różniczkując ostatnią równość względem y otrzymujemy: $0 = -\frac{1}{2} h''\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} h''\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$. Po podstawieniu $x = y$ otrzymujemy $h'' = \text{const}$ czyli h jest wielomianem stopnia drugiego. Ponieważ $h'(0) = 0$, więc h jest wielomianem postaci $h(x) = ax^2 + b$. Ostatecznie $\ln|f(x)| = ax^2 + b$, skąd $f(x) = ce^{ax^2}$ (a, c — dowolne stałe).

35. Po podstawieniu w równaniu $y = 0$, otrzymujemy

$$f \equiv 0 \text{ lub } f(0) = 1.$$

Teraz, podstawiając $x = 0$ i uwzględniając wyżej otrzymaną alternatywę, otrzymujemy

$$f(y) = f(-y),$$

co oznacza, że f jest funkcją parzystą.

Następnie, różniczkując nasze równanie dwukrotnie względem y, mamy

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

Po podstawieniu $y = 0$ i oznaczeniu $f''(0) = k$, otrzymujemy

$$f''(x) = kf(x).$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe, otrzymujemy (w zależności od k) trzy możliwe rozwiązania:

$$f(x) = a\cos\mathrm{h}\sqrt{k}x + b\sin\mathrm{h}\sqrt{k}x,$$
$$f(x) = a + bx$$

lub

$$f(x) = a\cos\mathrm{h}\sqrt{-k}x + b\sin\mathrm{h}\sqrt{-k}x.$$

Stąd, po uwzględnieniu wyżej otrzymanych warunków wnioskujemy, że $f(x)$ może być jedną z trzech możliwych funkcji:

$$\cos\mathrm{h}\sqrt{k}x,\ 1,\ \cos\mathrm{h}\sqrt{-k}x.$$

36. Gdy $b = 0$, to $f = \text{const}$, a dla $b \neq 0$ funkcje takie nie istnieją.

37. $f \equiv 0$.

38. $f \equiv 0$.

39. Wskazówka: Pokazać, że jeżeli f spełnia podane w zadaniu równanie funkcyjne, to $f(2x) = 2f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: Podstawić w równaniu $x = y = 0$. Wtedy otrzymujemy, że możliwe są dwa przypadki: $f(0) = 0$ lub $f(0) = \frac{1}{2}$. Rozważyć te dwa przypadki oddzielnie.

41. Po podstawieniu $x = y = z = 0$ otrzymujemy, że $2f(0) - 2f^2(0) \geqslant \frac{1}{2}$. Stąd $f(0) = \frac{1}{2}$. Po podstawieniu $x = y = z = 1$ otrzymujemy podobnie, że $f(1) = \frac{1}{2}$. Niech teraz x będzie dowolne, natomiast $y = z = 1$. Wtedy $2f(x) - f(x) = f(x) \geqslant \frac{1}{2}$. Podobnie po podstawieniu $y = z = 0$, przy dowolnym x otrzymujemy, że $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$. Ostatecznie $f(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Nietrudno sprawdzić, że ta funkcja spełnia rozważaną nierówność funkcyjną.

42. $f \equiv 0$ lub $f(x) = xa^x$, gdzie a jest dowolną stałą dodatnią.
Wskazówka: Rozważyć funkcję $g(x) = f(x)/x$ $(x \neq 0)$ i skorzystać z zad. 15.

43. Przypuśćmy, że istnieje funkcja f, o której mowa w zadaniu. Wtedy $f(x) > 0$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$. Oznaczmy $y = f(x)$. Po skorzystaniu z naszego równania otrzymujemy, że $f(y/2^n) = y/2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Jeśli oznaczymy $x_n = y/2^n$, to mamy, że $x_n > 0$ oraz $x_n \to 0$ przy $n \to \infty$. Stąd i z ciągłości funkcji f wynika, że $f(0) = 0$. Zatem $\big(f(x_n) - f(0)\big)/x_n = f(x_n)/x_n = \frac{1}{2}$, skąd na mocy założenia wynika, że $f'(0) = \frac{1}{2}$. Weźmy teraz ciąg $\{z_n\}$ taki, że $z_n < 0$ oraz $z_n \to 0$ przy $n \to \infty$. Wtedy $f(z_n)/z_n \to \frac{1}{2}$ dla $n \to \infty$. Zatem dla ustalonego ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left|\frac{f(z_n)}{z_n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

dla $n \geqslant n_0$. Stąd $f(z_n) < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) z_n < 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje funkcja spełniająca warunki naszego zadania.

44. Przykładem funkcji, o której mowa w zadaniu, jest funkcja f, nieparzysta i taka, że $f(x) = x/2$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ oraz $f(x) = x^2/(x^2+1)$ dla $x > 1$.

45. $f(x) = bx$.

ROZDZIAŁ XII

CAŁKA NIEOZNACZONA I CAŁKA OZNACZONA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

1. $-x\cos x+\sin x+C.$

2. $x\sin x+\cos x+C.$

3. $e^x(x-1)+C.$

4. $-e^{-x}(x+1)+C.$

5. $\frac{3^x}{\ln 3}\left(x-\frac{1}{\ln 3}\right)+C.$

6. $(x^2+1)\operatorname{arctg} x-x+C.$

7. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$

8. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$

9. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

10. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C.$

11. $\frac{1}{4}\left(x^2+x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C.$

Wskazówka: Skorzystać ze wzoru $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

12. $\frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$

13. $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C.$

14. $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C.$

15. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C.$

16. $x(\ln x-1)+C.$

17. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C.$

18. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$

19. $\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.$

20. $\frac{1}{2}x(\sin\ln x+\cos\ln x)+C.$

21. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{k+x^2}+k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right)+C.$

22. $\frac{1}{2}x^2e^x(\sin x-\cos x)+xe^x\cos x-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C.$

Wskazówka: Obliczyć najpierw całki

$\int e^x\sin x\,dx$, $\int e^x\cos x\,dx$.

23. $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C.$

24. $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C.$

25. $\frac{1}{4}x^2\sin 4x+\frac{1}{8}x\cos 4x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

26. Całkujemy przez części w następujący sposób:

$$\int\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\left(\sqrt{1+x^2}\right)=$$
$$=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int dx=$$
$$=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x+C.$$

27. Mamy:

$$\int\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\int\frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}dx=$$
$$=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\int\frac{(1+x)-1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-$$
$$-\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\right)dx=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+$$
$$+\int\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{1+x}=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C.$$

28. Po dwukrotnym całkowaniu przez części otrzymujemy

$$\int\frac{xe^{\operatorname{arc\,tg}x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d\left(e^{\operatorname{arc\,tg}x}\right)=\frac{xe^{\operatorname{arc\,tg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-$$
$$-\int\frac{e^{\operatorname{arc\,tg}x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx=\frac{xe^{\operatorname{arc\,tg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{d\left(e^{\operatorname{arc\,tg}x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{xe^{\operatorname{arc\,tg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-$$
$$-\frac{e^{\operatorname{arc\,tg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{xe^{\operatorname{arc\,tg}x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arc\,tg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arc\,tg} x} + C.$$

29. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

30. $-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C.$

31. $2(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}}+C.$

32. $\ln|\sin x|+C.$

33. $-\ln|\cos x|+C.$

34. $\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$

35. $\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+5\operatorname{arc\,tg} x+C.$

36. $\frac{1}{6}\ln^6 x+C.$

37. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\operatorname{tg} x+3)^4}+C.$

38. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{(2x^2+7)^3}+C.$

39. $-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}+C.$

40. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x^4+C.$

41. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+C.$

42. $\frac{1}{4(n+1)}(2x^2+3)^{n+1}+C.$

43. $-e^{1/x}+C.$

44. $2\sin\sqrt{x}+C.$

45. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\sin x)+C.$

46. $\arcsin(e^x)+C.$

47. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^2 x)+C.$

48. $\frac{1}{4}\sin^4 x+C.$

49. $\frac{2}{15}\sqrt{(5\ln x+7)^3}+C.$

50. $\frac{2}{3}\sqrt{5+3\sin x}+C.$

51. $\ln|\ln(\sin x)|+C.$

52. $2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C.$

53. $2\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right|+C.$

Wskazówka: Podstawić $t=\sqrt{x}$.

54. $\operatorname{arc\,tg} e^x+C.$

Wskazówka: $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2}.$

55. $-\ln\left(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}\right)+C.$

Wskazówka: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\int\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}.$

56. $\ln|\ln(\ln x)|+C.$

57. $\dfrac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x},\ a^2\neq b^2.$

Wskazówka: Podstawić $t=a^2\sin^2x+b^2\cos^2x.$

58. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

59. Wskazówka: W całce $\int f(ax+b)\,dx$ podstawić $t=ax+b.$

60. $-\dfrac{1}{5}e^{-5x}+C.$

61. $-\dfrac{1}{7}\cos 7x+C.$

62. $\dfrac{1}{\pi}\sin\pi x+C.$

63. $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

64. $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

65. $-\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}+C.$

66. $\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$

Wskazówka: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1.$

67. $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C.$

68. Mamy:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

69. $-\dfrac{1}{7}xe^{-7x}-\dfrac{1}{49}e^{-7x}+C.$

70. $\dfrac{1}{36}\left(9x^2+3x\sin 6x+\dfrac{1}{2}\cos 6x\right)+C.$

71. $-\ln\left(1-x+\sqrt{5-2x+x^2}\right)+C.$

72. $\dfrac{1}{3}\arcsin\left(\dfrac{3x-2}{\sqrt{2}}\right)+C.$

73. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{7}{3}}\right|+C.$

74. $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)+C.$

75. $\frac{1}{2}\left[(x+3)\sqrt{x^2+6x+13}+4\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+C.\right.$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 21 i 59.

76. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\right.$

$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right|+C.$

77. $\frac{1}{2}\left[(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right]+C.$

78. $\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+\frac{6x-3}{8}\sqrt{1-\frac{(2x-1)^2}{9}}+C.$

79. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$

80. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C.$

81. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}\right|+C.$

82. $-4\sqrt{1-x^2-2x}+\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$

83. $\sqrt{5-x^2-4x}+5\arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right)+C.$

Wskazówka: Przekształcamy naszą całkę w następujący sposób:

$$\int\frac{3-x}{\sqrt{5-x^2-4x}}dx=\int\frac{-2x+6}{2\sqrt{5-x^2-4x}}dx=$$

$$=\int\frac{(-2x-4)+10}{2\sqrt{5-x^2-4x}}dx=\int\frac{-2x-4}{2\sqrt{5-x^2-4x}}dx+$$

$$+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}}.$$

Stąd już łatwo otrzymamy wymieniony wyżej rezultat.

84. Mamy:

$$\int x\sqrt{x^2+3x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int [(2x+3)-3]\sqrt{x^2+3x+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x+3)\sqrt{x^2+3x+4}\,dx - \frac{3}{2}\int \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}I_1 - \frac{3}{2}I_2.$$

Całkę I_1 obliczamy podstawiając $t = x^2+3x+4$, natomiast aby obliczyć całkę I_2 korzystamy z zad. 59 i 21. Ostatecznie mamy:

$$\int x\sqrt{x^2+3x+4}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3x+4)^3} -$$

$$-\frac{3}{4}\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+3x+4} + \frac{7}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+4}\right|\right] + C.$$

85. $-\frac{1}{6}\sqrt{(2x^2+3x-8)^3} + \frac{11}{8\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}x+\right.\right.$

$$\left.+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\sqrt{2x^2+3x-8} - \frac{73}{8}\ln\left|\sqrt{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2x^2+3x-8}\right|\Bigg] + C.$$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 59 i 21.

86. Rozważaną całkę doprowadzamy do postaci

$$\int (2x-1)\sqrt{6x-x^2}\,dx = -\int(-2x+6)\sqrt{6x-x^2}\,dx +$$

$$+5\int\sqrt{9-(x-3)^2}\,dx.$$

W pierwszej z całek podstawiamy $t = 6x-x^2$, a w drugiej $x-3 = 3\sin t$. Po wykonaniu obliczeń otrzymamy, że nasza całka jest równa

$$-\frac{2}{3}\sqrt{(6x-x^2)^3} + \frac{45}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) + \frac{x-3}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}\right] + C.$$

87. $\frac{1}{3}\sqrt{(6-4x^2-4x)^3} + 7\left[\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{2x+1}{\sqrt{7}}\sqrt{1-\frac{(2x+1)^2}{7}}\right] + C.$

Wskazówka: Przedstawić rozważaną całkę w postaci

$$\int (3-2x)\sqrt{6-4x^2-4x}\,dx = \frac{1}{4}\int(-8x-4)\sqrt{6-4x^2-4x}\,dx +$$

$$+4\int\sqrt{7-(2x+1)^2}\,dx,$$

a następnie w pierwszej całce po prawej stronie podstawić $t = 6-4x^2-4x$, w drugiej zaś podstawić $2x+1 = \sqrt{7}\sin t$.

88. $\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+C.$

89. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$

90. $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C.$

91. $-\frac{1}{36}\ln|x-1|-\frac{2}{45}\ln|x+2|+\frac{3}{80}\ln|x-3|+$

$+\frac{5}{144}\ln|x+5|+C.$

92. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C.$

93. $\frac{1}{3}\cdot\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{5}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

94. $\ln\frac{x^2}{|x+1|}+\frac{6}{x+1}+C.$

95. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.$

96. $-\frac{1}{3}\frac{1}{(x-2)^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-2)^2}+\ln|x-2|+C.$

97. $\frac{1}{27}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right)+C.$

98. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+C.$

99. Wskazówka: Zauważyć, że

$x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4 = (x-2)^2(x+1)^3.$

100. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

101. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

102. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arc\,tg} x+C.$

103. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$

104. $\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

Wskazówka: $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$.

105. Wskazówka: $x^4+x^2+4=(x^2+2)^2-(\sqrt{3}x)^2$.

106. $\ln\frac{x^4+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C.$

108. Wskazówka: Wyprowadzić wzór rekurencyjny dla całki

$$I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Stąd już łatwo będzie obliczyć naszą całkę.

109. $\frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C.$

Wskazówka: $x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=(1+x^2)^2(x+1)$.

110. Wskazówka: $x^6+3x^4-4=(x^2-1)(x^2+2)^2$.

111. $\frac{1}{648}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{3}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right]+C.$

Wskazówka: Skorzystać z zad. 108 i 59.

112. $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C.$

113. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C.$

114. $-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|+C.$

115. $-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}|+$

$+2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|+C.$

116. $\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$

117. $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$

118. $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7} + 112\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right| + C.$

119. $\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{95}{24}x - \frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5} +$

$+\frac{35}{8}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right) + C.$

120. $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$

121. $-\dfrac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$

Wskazówka: Przedstawiamy szukaną całkę w postaci:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} +$$
$$+\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

Różniczkując obustronnie powyższą równość i sprowadzając następnie do wspólnego mianownika, otrzymamy:

$$x^3 \equiv (2Ax+B)(1+2x-x^2) + (Ax^2+Bx+C)(1-x) + \lambda.$$

Stąd znajdujemy stałe A, B, C i λ.

122. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C.$

123. $\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x} + C.$

125. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{x-1}\right| - \dfrac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)} + C.$

Wskazówka: Skorzystać z równości:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2},$$
$$1+2x-x^2 = 2-(x-1)^2.$$

126. Po podstawieniu $x+\frac{1}{2}=t$, otrzymujemy

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}=\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}.$$

Następnie, podstawiając $z=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}$, mamy

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\frac{3}{8}-z^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+2z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2z\sqrt{2}}\right|+C.$$

Ostatecznie

$$I=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x-1)}+(2x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x-1)}-(2x+1)\sqrt{2}}\right|+C.$$

127. W s k a z ó w k a: Ponieważ $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, wystarczy podstawić (trzecie podstawienie Eulera)

$$\sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1).$$

Stąd

$$\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}=\frac{-2(t^2+2t)}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}.$$

128. $\sqrt{x+x^2}\,\dfrac{8x^2+2x-3}{24}+\dfrac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+C.$

129. $\dfrac{6}{5}x^{30}-4x^{18}+18x^6+\dfrac{3x^6}{1+x^{12}}-21\operatorname{arc\,tg}x^6+C.$

130. $\dfrac{3}{5}\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^5}-2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}+$

$+3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}+C.$

131. W s k a z ó w k a: Podstawić $t=\dfrac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

132. $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C.$

133. $3\left[\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\dfrac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C.$

134. $-\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-$

$-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|+C.$

135. $\dfrac{12}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}-\dfrac{18}{5}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}+$

$+\dfrac{36}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$

136. $\dfrac{1}{5}\cos^5 x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+C.$

137. $\dfrac{1}{48}\cos^3 2x-\dfrac{1}{16}\cos 2x+C.$

138. $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$

139. $\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C.$

140. $\dfrac{1}{7}\sin^7 x-\dfrac{2}{9}\sin^9 x+\dfrac{1}{11}\sin^{11} x+C.$

141. $\dfrac{3}{8}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+C.$

142. $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+C.$

143. $\dfrac{5}{16}x+\dfrac{1}{12}\sin 2x\left(\cos^4 x+\dfrac{5}{4}\cos^2 x+\dfrac{15}{8}\right)+C.$

144. $\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}+C.$

145. $\ln|\operatorname{tg} x|+C.$

146. $\ln|\operatorname{tg} x|-\dfrac{1}{2\sin^2 x}+C.$

147. $\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{4}\sin 2x-\dfrac{3}{2}x+C.$

148. $\dfrac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x}+C.$

149. $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C.$

150. $x-\dfrac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x+\dfrac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C.$

151. $-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C.$

152. $\ln\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}}+C.$ **153.** $\ln\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}+C.$

154. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C.$ **155.** $\dfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{5\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+4}{3}\right)+C.$

156. $\ln(2+\cos x)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C.$

157. $\dfrac{4}{25}x-\dfrac{3}{25}\ln|\operatorname{tg}x+2|+\dfrac{2}{5(\operatorname{tg}x+2)}-\dfrac{3}{25}\ln|\cos x|+C.$

158. $\dfrac{1}{2-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}+C.$ **159.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C.$

160. $\ln\left(\dfrac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg}x-1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1}}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

W s k a z ó w k a: Przedstawić szukaną całkę w postaci

$$\int\frac{\cos x}{\sin^3x-\cos^3x}\,dx=\int\frac{\dfrac{1}{\cos^2x}}{\operatorname{tg}^3x-1}\,dx,$$

a następnie podstawić $t \doteq \operatorname{tg}x$.

161. $-\dfrac{1}{2}\left[\operatorname{ctg}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\right]+C.$

162. $-\dfrac{1}{14}\cos 7x-\dfrac{1}{2}\cos x+C.$ **163.** $\dfrac{1}{16}\sin 8x+\dfrac{1}{8}\sin 4x+C.$

164. $-\dfrac{1}{16}\sin 8x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

165. $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{24}\sin 6x+\dfrac{1}{16}\cos 4x+\dfrac{1}{8}\cos 2x+C.$

166. $\dfrac{2}{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}^2x-3}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}+C.$

167. Po podstawieniu $t^3=\sin x$, mamy

$$\int\frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2x}}=3\int\frac{dt}{1-t^6}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1-t^3}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t^3}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\frac{(1-t)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2}{t^2-t+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Wystarczy teraz podstawić w otrzymanym wyniku $t=\sqrt[3]{\sin x}$.

168. Zauważmy, że wyrażenie pod całką możemy zapisać w postaci

$$\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}=\frac{1}{4}\frac{\sin^2 2x}{(\sin^2 x)^4+(\cos^2 x)^4}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\sin^2 2x}{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4}=\frac{4\sin^2 2x}{2+12\cos^2 2x+2\cos^4 2x}=$$

$$=\frac{2\frac{\sin^2 2x}{\cos^4 2x}}{\frac{1}{\cos^4 2x}+6\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}+1}=\frac{\operatorname{tg}^2 2x\cdot\frac{2}{\cos^2 2x}}{(1+\operatorname{tg}^2 2x)^2+6(1+\operatorname{tg}^2 2x)+1}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2 2x\cdot d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^4 2x+8\operatorname{tg}^2 2x+8}.$$

Podstawiając teraz w naszej całce $\operatorname{tg} 2x = t$, otrzymamy

$$\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx=\int\frac{t^2dt}{t^4+8t^2+8}.$$

Czytelnik dokończy resztę.

169. $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2-\sin x}{2+\sin x}\right)+C.$

170. $\frac{1}{4}(\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{ctg}^4 x)+2(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+6\ln|\operatorname{tg} x|+C.$

171. $\cosh x+C.$

172. $\sinh x+C.$

173. $\operatorname{tgh} x+C.$

174. $\frac{\sinh x\cdot\cosh x-x}{2}+C.$

175. $x-\operatorname{tgh} x+C.$

176. $x-\operatorname{ctgh} x+C.$

177. $\ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right|+C.$

178. $\ln|\operatorname{tgh} x|+C.$

179. $x\operatorname{tgh} x-\ln(\cosh x)+C.$

180. $\frac{x}{\ln x}+C.$

181. $\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]+C.$

182. $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+C.$

183. Przekształcając naszą całkę, otrzymujemy

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}} = -\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+C.$$

184. $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C.$

Wskazówka: Podstawić $t=\sqrt{x}$.

185. $x-3\ln\left[(1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}\right]-3\operatorname{arc\,tg}(e^{x/6})+C.$

Wskazówka: Podstawić $t=e^{x/6}$.

186. Stosując całkowanie przez części, mamy:

$$\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-$$

$$-2\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-$$

$$-\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,d(2\sqrt{1+x^2}) =$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C.$$

187. $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

Wskazówka: Zastosować całkowanie przez części, przyjmując $u=\ln x, v' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

188. Przekształćmy obliczaną całkę w następujący sposób:

$$I = \int x\arcsin(1-x)\,dx = \int (1-x)\arcsin(1-x)\,d(1-x)-$$

$$-\int \arcsin(1-x)\,d(1-x).$$

Następnie, podstawiając $1-x=t$, mamy:

$$I = \int t\arcsin t\,dt-\int \arcsin t\,dt = \frac{t^2}{2}\arcsin t-$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}-t\arcsin t+\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{t^2}{2}\arcsin t-t\arcsin t-\sqrt{1-t^2}-\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Stąd już szybko można otrzymać końcowy wynik

$$I = \frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x) - \frac{x+3}{4}\sqrt{2x-x^2}+C.$$

189. Całkując przez części otrzymujemy

$$\int x\arccos\frac{1}{x}dx = \int \arccos\frac{1}{x}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C.$$

190. Po podstawieniu $t = \sqrt{\operatorname{tgh} x}$, mamy:

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{2t\,dt}{1-t^4}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\int\sqrt{\operatorname{tgh} x}\,dx = 2\int\frac{t^2\,dt}{1-t^4}.$$

Po wykonaniu odpowiednich rachunków otrzymujemy:

$$\int\sqrt{\operatorname{tgh} x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\operatorname{tgh} x}}{1-\sqrt{\operatorname{tgh} x}}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tgh} x}+C.$$

191. a) Dzieląc przedział $[-2,3]$ na n równych części, otrzymujemy

$$x_i = -2+\frac{5i}{n},\ \Delta x_i = \frac{5}{n}\ (i=0,1,\dots,n).$$

Posługując się sumami górnymi, otrzymujemy:

$$S_n = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{5i}{n}\right)^2 = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{20}{n}i+\frac{25}{n^2}i^2\right) =$$

$$= \frac{5}{n}\left[4n - \frac{20}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{25}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right],$$

gdzie skorzystaliśmy z zad. 1 i 2, rozdz. I. Zatem

$$\int_{-2}^{3} x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = 5\left(4-10+\frac{25}{3}\right) = \frac{35}{3}.$$

b) Wskazówka: Skorzystać z zad. 3 i 1, rozdz. I.

c) $S_n = \dfrac{10230}{n(2^{10/n}-1)}$.

Wskazówka: Granicę $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ obliczyć korzystając z zad. 54, rozdz. VI.

d) Wskazówka: Wykorzystać wzór z zad. 40, rozdz. I.

192. Weźmy podział $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2$ przedziału $[1, 2]$. Biorąc sumę górną, otrzymamy

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i x_{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

193. Weźmy jakikolwiek podział przedziału $[0, 1]$ za pomocą punktów $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$. Wtedy

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1, \quad \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0,$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$, zatem suma dolna s_n i suma górna S_n wynoszą odpowiednio

$$s_n = 0, \ S_n = 1.$$

Stąd

$$\underline{\int_0^1} f(x)\, dx = 0, \quad \overline{\int_0^1} f(x)\, dx = 1,$$

a więc f nie jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$.

194. 1. **195.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **196.** $\operatorname{arc\,tg} 4 - \operatorname{arc\,tg} 3$.

197. $\frac{1}{2}$. **198.** $\frac{1}{5}$. **199.** $\frac{\pi}{12}$.

202. $\frac{\pi}{2}$. **203.** $e - \sqrt{e}$. **204.** $\frac{\pi}{2}$.

205. $\frac{\pi}{6}$. **206.** 2. **207.** $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}e^{\pi} - 1\right)$.

208. $\pi^3 - 6\pi$. **209.** $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$.

210. Przedstawiamy naszą całkę w postaci

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx.$$

W całce $\int_{-a}^{0} f(x)\, dx$ podstawmy $t = -x$. Wtedy

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_a^0 f(-t)\, dt = -\int_a^0 f(t)\, dt = \int_0^a f(t)\, dt = \int_0^a f(x)\, dx.$$

Zatem

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

211. Wskazówka: Porównaj rozwiązanie zad. 210.

213. Wskazówka: W całce $\int_a^b f(x)\,dx$ podstawić $t = \frac{x-a}{b-a}$.

214. Wskazówka: W całce po lewej stronie równości podstawić $t = x^2$.

215. **a)** Niech $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Korzystając ze wzoru $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, mamy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx.$$

Po podstawieniu $t = \frac{\pi}{2} - x$, otrzymujemy dalej

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$$

b) Napiszmy

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi} x f[\sin(\pi - x)]\,dx$$

i podstawmy $\pi - x = t$. Wtedy

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f(\sin t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\,dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx.$$

Stąd

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

216. Napiszmy najpierw

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^{T} f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x - T)\,dx.$$

Zauważmy teraz, że ze względu na okresowość funkcji f możemy napisać

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x-T)\,dx.$$

Po podstawieniu do tej ostatniej całki $t = x-T$, otrzymujemy

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt.$$

Zatem

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

i koniec dowodu.

217. a) Mamy

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^e |\ln x|\,dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx.$

Czytelnik uzupełni pozostałe obliczenia.

d) Ponieważ

$$\operatorname{sgn}(x-x^3) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x\in(0,1) \\ 0 & \text{dla } x=0 \text{ lub } x=1 \\ -1 & \text{dla } x\in(1,3], \end{cases}$$

więc

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx = \int_0^1 dx - \int_1^3 dx = -1.$$

e) $-\dfrac{\pi^2}{4}$ (por. rozwiązanie w punkcie d).

218.

$$F(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x\in[-1,0] \\ 1+\dfrac{x^2}{2} & \text{dla } x\in(0,1] \\ \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}(x^3-1) & \text{dla } x\in(1,2]. \end{cases}$$

220. Oznaczmy $f(t) = |t-1|+|t+1|$. Wtedy

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{dla } t \in [0,1] \\ 2t & \text{dla } t > 1. \end{cases}$$

Zatem

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0,1] \\ x^2+1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

221. Oznaczając $g(t) = \big||t-1|-2\big|$, po prostych rachunkach, otrzymujemy

$$g(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla } t \in [0,1] \\ -t+3 & \text{dla } t \in (1,3] \\ t-3 & \text{dla } t > 3. \end{cases}$$

Stąd

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+x & \text{dla } x \in [0,1] \\ -\dfrac{x^2}{2}+3x-1 & \text{dla } x \in (1,3] \\ \dfrac{x^2}{2}-3x+8 & \text{dla } x > 3. \end{cases}$$

222. a) Obliczymy najpierw całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$. Dzieląc licznik i mianownik przez t^2, otrzymujemy

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{1/t^2\,dt}{\sqrt{1-1/t^2}}.$$

Podstawiając $u = \dfrac{1}{t}$, mamy

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin\frac{1}{t}+C.$$

Zatem

$$\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}.$$

Stąd

$$-\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Ostatecznie otrzymujemy, że $x = 2$.

b) Łatwo sprawdzić, że

$$\int \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = -2\arcsin(e^{-t/2})+C.$$

Stąd

$$\int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = -2\arcsin(e^{-x/2})+\frac{\pi}{2}.$$

Wstawiając do naszego równania, otrzymujemy

$$-2\arcsin(e^{-x/2})+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6},$$

skąd $x = \ln 4$.

223. $\frac{-4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C.$

Wskazówka: Podstawić $t=\sqrt{x}$.

224. Po podstawieniu $x = \sin t$ i całkowaniu przez części, mamy:

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)\,dt =$$

$$=\frac{t^2}{2}+\int\frac{t\,dt}{\sin^2 t}=\frac{t^2}{2}-\int t\,d(\operatorname{ctg} t)=\frac{t^2}{2}-t\operatorname{ctg} t+$$

$$+\ln|\sin t|+C=\frac{1}{2}\arcsin^2 x-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+$$

$$+\ln|x|+C.$$

225. Podstawmy $t=\sqrt{x^2+1}$. Wtedy mamy

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int t^2\ln(t^2-2)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\ln(t^2-2)\,d\left(\frac{t^3}{2}\right)=\frac{1}{6}t^3\ln(t^2-2)-\frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2}=$$

$$=\frac{t^3}{6}\ln(t^2-2)-\frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3}+2t+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right)+C.$$

Teraz po podstawieniu $t=\sqrt{x^2+1}$ otrzymujemy żądany wynik.

226. $\frac{b-a}{2}\operatorname{arctg}^2 x+a\left(x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)+C.$

Wskazówka: Podstawić $x=\operatorname{tg} t$, a następnie zastosować całkowanie przez części.

227. $-\sqrt{1-x^2}\left(\frac{2+x^2}{3}\right)\arccos x-\frac{6x+x^3}{9}+C.$

Wskazówka: Podstawić $x=\cos t$.

228. Podstawiając $x = \operatorname{tg} t$, doprowadzamy naszą całkę do całki $\int t\cdot \operatorname{tg}^4 t\,dt$.

Tę ostatnią całkę obliczamy, całkując przez części

$$\int t\operatorname{tg}^4 t\,dt = t\left(t-\operatorname{tg} t+\frac{\operatorname{tg}^3 t}{3}\right)-\int\left(t-\operatorname{tg} t+\frac{\operatorname{tg}^3 t}{3}\right)dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}+t\left(\frac{\operatorname{tg}^3 t}{3}-\operatorname{tg} t\right)-\frac{\operatorname{tg}^2 t}{6}-\frac{4}{3}\ln|\cos t|+C.$$

Ostatecznie

$$\int\frac{x^4\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}^2 x+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x^2}{6}+$$

$$+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C.$$

229. $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C.$

W s k a z ó w k a: Zastosować całkowanie przez części.

230. $x^x+C.$

231. Podstawiając $t = e^x$ i stosując całkowanie przez części, otrzymujemy

$$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = \int\frac{\arcsin t}{t^2}dt = -\frac{1}{t}\arcsin t+\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{t}\arcsin t-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)+C =$$

$$= -e^{-x}\arcsin e^x-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+x+C.$$

232. Całkujemy przez części:

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx = e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int e^x\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx =$$

$$= e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x\,dx}{1+\cos x}+\int\frac{e^x\,d(\cos x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x\,dx}{1+\cos x}-\frac{e^x}{1+\cos x}+\int\frac{e^x\,dx}{1+\cos x}+C =$$

$$= \frac{e^x\sin x}{1+\cos x}+C.$$

233.

$$\int\max(1,x^2)\,dx = \begin{cases} x+C & \text{dla } |x|\leqslant 1\\[2mm] \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}\operatorname{sgn} x+C & \text{dla } |x|>1.\end{cases}$$

234. Rozważmy przypadki $x \geqslant 0$ i $x \leqslant 0$. Mamy

$$\int e^{-|x|}\,dx = \int e^{x}\,dx = e^{x}+C_1 \quad \text{dla} \quad x<0,$$

$$\int e^{-|x|}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}+C_2 \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0.$$

Ponieważ wynikiem całkowania jest funkcja ciągła, więc w punkcie $x=0$ powinna zachodzić równość $-1+C_2 = 1+C_1$. Stąd $C_2 = C_1+2$. Ostatecznie

$$\int e^{-|x|}\,dx = \begin{cases} 2-e^{-x}+C & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ e^{x}+C & \text{dla} \quad x<0. \end{cases}$$

235. Należy pokazać, że $G'(y_0) = f^{-1}(y_0)$ dla dowolnie ustalonego y_0. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że f jest ściśle rosnąca. Weźmy $y > y_0$ i oznaczmy $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Wtedy $G(y)-G(y_0) = yx - y_0x_0 - (F(x)-F(x_0))$. Na podstawie twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje $c \in (x_0, x)$ takie, że $F(x)-F(x_0) = f(c)(x-x_0)$. Stąd otrzymujemy

$$y_0(x-x_0) < F(x)-F(x_0) < y(x-x_0).$$

Korzystając z powyższej nierówności łatwo pokazujemy, że $f^{-1}(y_0) < (G(y)-G(y_0))/(y-y_0) < f^{-1}(y)$. Po przejściu do granicy otrzymujemy, że $G'_{+}(y_0) = f^{-1}(y_0)$. Podobnie pokazujemy, że $G'_{-}(y_0) = f^{-1}(y_0)$. Koniec dowodu.

236. a) Niech $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Całkując przez części mamy

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x \sin x\,dx = -\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

stąd $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ Ponadto

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \; I_1 = 1.$$

b) Wystarczy zauważyć, że na podstawie zad. 215a zachodzi

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

c) Niech $J_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx$. Po podstawieniu $x = \sin t$ otrzymujemy

$$J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt,$$

a więc wystarczy skorzystać z zależności ustalonych w **a** i w **b**.

237. Weźmy funkcję $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ określoną następująco

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{dla} \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Funkcja f jest całkowalna na przedziale $[0,1]$, ponieważ jest monotoniczna. Nie ma ona jednak całki nieoznaczonej na tym przedziale.

Rzeczywiście, gdyby f miała całkę nieoznaczoną F na przedziale $[0,1]$, to $F'(x) = f(x)$ dla $x \in [0,1]$. Zgodnie z zad. 98, rozdz. VIII, oznaczałoby to, że f ma własność Darboux na przedziale $[0,1]$, co nie jest prawdą.

238. Weźmy funkcję $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ zadaną następująco

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in [0,1] \cup \mathbb{Q} \cap [0,2] \\ 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}' \cap [0,2]. \end{cases}$$

Wtedy $f \equiv 0$ na przedziale $[0,1]$, więc jest ona całkowalna na tym przedziale. Metodą podobną jak w rozwiązaniu zad. 193 pokazuje się, że f nie jest całkowalna na przedziale $[0,2]$.

239. Przykładem takiej funkcji jest funkcja f określona na przedziale $[a,b]$ w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x \text{ wymiernych z } [a,b] \\ 1 & \text{dla} \quad x \text{ niewymiernych z } [a,b] \end{cases}$$

(por. rozwiązanie zad. 193).

240. Ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta (sprawdzić!), więc na podstawie zad. 211 rozważana całka jest równa 0.

241. Wskazówka: W którejkolwiek z całek podstawić $t = 1 - x$.

242. W zadaniu 215b ustaliliśmy, że

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

Zatem, aby udowodnić nasz wzór wystarczy pokazać, że

$$\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$$

Aby udowodnić tę równość, napiszmy

$$\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

Podstawmy dalej $t = x - \frac{\pi}{2}$ w całce $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx$. Wtedy

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt.$$

Ale z zad. 215a mamy, że

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt.$$

Zatem ostatecznie otrzymujemy

$$\int\limits_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$$

Stąd wynika żądana równość.

243. Oznaczmy $f(u) = \dfrac{u}{2-u^2}$. Wtedy

$$f(\sin x) = \frac{\sin x}{2-\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

Mamy

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Zatem, korzystając z zad. 242, otrzymujemy

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int\limits_{0}^{\pi} x\cdot f(\sin x)\,dx = \pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

244. Załóżmy, że f jest nieparzysta. Wtedy

$$F(-x) = \int\limits_{0}^{-x} f(t)\,dt.$$

Podstawiając $z = -t$, otrzymujemy

$$F(-x) = -\int\limits_{0}^{x} f(-z)\,dz = -\int\limits_{0}^{x} [-f(z)]\,dz = \int\limits_{0}^{x} f(z)\,dz = F(x).$$

co oznacza, że F jest parzysta.

Podobnie pokazujemy, że F jest nieparzysta, o ile f jest parzysta.

245. Ponieważ funkcja podcałkowa $g(x) = \dfrac{2x}{x^2-2x+2}$ jest ciągła na przedziale $[-1, 1]$, więc dla funkcji $f(x) = \int\limits_{0}^{x} g(t)\,dt$ mamy $f'(x) = g(x)$, $x \in [-1, 1]$.

Stosując standardowe metody rachunku różniczkowego widzimy, że $f'(x) = g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ oraz $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$. Zatem

$$\min_{[-1,1]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\max_{[-1,1]} f(x) = \max\{f(-1), f(1)\}.$$

Czytelnik wykona rachunki niezbędne dla dokończenia rozwiązania.

246. Oznaczmy $A = \int_a^b f^2(x)\,dx$, $B = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$, $C = \int_a^b g^2(x)\,dx$. Rozpatrzymy dwa możliwe przypadki:

1° $A = C = 0$.

Wtedy, korzystając z nierówności $|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}(f^2(x)+g^2(x))$ i całkując jej obie strony, otrzymujemy

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{\int_a^b f^2(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx\right\} = 0,$$

stąd wynika, że $B = \left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| = 0 \leqslant AC = 0$.

2° Załóżmy, że jedna z liczb A lub C jest różna od zera. Niech np. $A \neq 0$. Rozważmy dalej wyrażenie $(\lambda f(x)+g(x))^2$, $x \in [a,b]$, gdzie λ jest parametrem rzeczywistym. Oczywiście $(\lambda f(x)+g(x))^2 \geqslant 0$ dla $x \in [a,b]$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Stąd, po scałkowaniu, otrzymujemy

$$\lambda^2 A + 2B\lambda + C \geqslant 0,$$

dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że wyróżnik powyższego trójmianu kwadratowego (zmiennej λ) jest niedodatni, tzn. $4B^2 - 4AC \leqslant 0$. Stąd

$$B^2 \leqslant AC,$$

a więc także $|B| \leqslant \sqrt{A}\cdot\sqrt{C}$. Nierówność ta pokrywa się z nierównością, którą należało udowodnić.

247. Z nierówności $1 < \ln x < \frac{x}{e}$ prawdziwej dla $x > e$ wynika w szczególności, że

$$\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x}} < 1, \text{ dla } x > e.$$

Całkując tę nierówność w przedziale $[3,4]$, otrzymujemy

$$\sqrt[3]{e}\int_3^4 x^{-1/3}\,dx < \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} < 1.$$

Ponieważ $\int_3^4 x^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{9})$, a także (co łatwo sprawdzić)

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{e}\,(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{9}) > 0{,}92,$$

więc dostajemy stąd żądaną w zadaniu nierówność.

Czytelnik wyjaśni, dlaczego w efekcie końcowym możemy zachować ostre nierówności.

248. Wychodząc z nierówności $x^3 \leqslant x^2$ dla $x\in[0,1]$, otrzymujemy

$$4-2x^2 \leqslant 4-x^2-x^3 \leqslant 4-x^2,\ x\in[0,1].$$

Stąd (uwzględniając, że $4-2x^2 > 0$ dla $x\in[0,1]$), mamy

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}},\ x\in[0,1].$$

Całkując powyższą nierówność w przedziale $[0,1]$, otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}.$$

Z nierówności tej, po uwzględnieniu, że

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

oraz

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}},$$

otrzymujemy żądaną nierówność.

249. Ponieważ $x^4 \leqslant x^2$ dla $x\in[0,1]$, więc $\sqrt{1+x^4} \leqslant \sqrt{1+x^2}$ dla $x\in[0,1]$. Stąd

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

a więc

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Ponieważ $\ln(1+\sqrt{2}) > 0{,}78$, zatem otrzymujemy nierówność po lewej stronie.

Aby otrzymać nierówność po prawej stronie skorzystamy z nierówności Schwarza (por. zad. 246):

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \cdot 1\, dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}}.$$

Rozkładając funkcję wymierną $\frac{1}{1+x^4}$ na ułamki proste i wykonując niezbędne rachunki, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right]+C.$$

Stąd

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)\right] < (0{,}93)^2$$

i koniec dowodu.

250. Wskazówka: Wykorzystać nierówność $x^4 \leqslant x^3 \leqslant x^2$ dla $x \in [0, 1]$, skąd

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}, \quad x \in [0, 1].$$

251. Wskazówka: Zauważyć, że

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^6}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{dla } x \in [0, 1].$$

252. Nierówność po lewej stronie jest konsekwencją tego, że $1 \leqslant \sqrt{1+x^4}$. Aby otrzymać nierówność po prawej stronie skorzystać należy z nierówności Schwarza z zad. 246.

253. a) Mamy:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Stąd otrzymujemy żądany wynik.

b) Ustalmy $\varepsilon > 0$ dostatecznie małe i napiszmy

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = I'_n + I''_n.$$

Zauważmy, że

$$|I''_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z drugiej strony ciągi $\{I_n\}$, $\{I'_n\}$ są ciągami malejącymi, więc istnieją granice tych ciągów. Oznaczmy $g_1 = \lim\limits_{n\to\infty} I'_n$, $g = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Z twierdzenia o wartości średniej dla całki wnioskujemy, że istnieje $c_n \in \left(0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ takie, że

$$I'_n = \sin c_n \cdot I'_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$

Z ciągu $\{c_n\}$ (jako ograniczonego) możemy wybrać podciąg $\{c_{k_n}\}$ zbieżny do pewnego $c \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right]$ (jest to konsekwencja twierdzenia Bolzano-Weierstrassa). Stąd, wychodząc z równości

$$I'_{k_n} = \sin c_{k_n} \cdot I'_{k_n - 1},$$

mamy $g_1 = g_1 \sin c$. Ponieważ $\sin c < 1$, więc $g_1 = 0$. Korzystając teraz ze związków ustalonych na początku, otrzymujemy

$$g \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

skąd wobec dowolności ε wynika, że

$$g = \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

254. Rozważmy dwa możliwe przypadki.

1° Załóżmy, że $f^{-1}(b) \leqslant a$. Wtedy, uwzględniając założenia oraz oznaczenia i równość z zad. 235, otrzymujemy:

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(x)\,dx = F(a)+\left[xf^{-1}(x)-F\left(f^{-1}(x)\right)\right]_0^b =$$
$$= \left[F(a)-F\left(f^{-1}(b)\right)\right]+bf^{-1}(b) = \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(t)\,dt+bf^{-1}(b) \geqslant$$
$$\geqslant \left[a-f^{-1}(b)\right]f\left(f^{-1}(b)\right)+bf^{-1}(b) = \left[a-f^{-1}(b)\right]b+bf^{-1}(b) = ab.$$

W powyższym dowodzie skorzystaliśmy z faktu, że jeżeli f jest rosnąca na przedziale $\left[f^{-1}(b), a\right]$, to $f(t) \geqslant f\left(f^{-1}(b)\right)$ dla $t \in \left[f^{-1}(b), a\right]$.

2° Załóżmy teraz, że $a < f^{-1}(b)$. Wtedy, rozumując podobnie jak w przypadku 1°, mamy:

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(x)\,dx = F(a)-F\left(f^{-1}(b)\right)+bf^{-1}(b) =$$
$$= -\left[F\left(f^{-1}(b)\right)-F(a)\right]+bf^{-1}(b) = -\int_a^{f^{-1}(b)} f(t)\,dt+bf^{-1}(b) \geqslant$$
$$\geqslant -\left(f^{-1}(b)-a\right)b+bf^{-1}(b) = ab.$$

255. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $f(x_0) < 0$ dla pewnego $x_0 \in [a, b]$. Wtedy z ciągłości funkcji f wynika, że istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(x) < 0$ dla $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap [a, b]$.

Oczywiście zbiór $[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap [a, b]$ jest przedziałem niepustym i nie redukującym się do punktu. Oznaczmy ten przedział przez $[c, d]$.

Ponieważ $f(x) < 0$ dla $x \in [c, d]$, więc

$$\int_c^d f(x)\,dx \leqslant 0.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

256. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że dla każdego przedziału $[c, d]$, $[c, d] \subset [a, b]$, zachodzi

$$\inf_{[c,d]} f(x) = 0.$$

Załóżmy dalej, że $[c, d]$ jest dowolnie ustalonym przedziałem zawartym w $[a, b]$. Weźmy dowolny podział $c = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = d$ przedziału $[c, d]$. Niech m_k oznacza kres dolny funkcji f na przedziale $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Oczywiście $m_k = 0$, więc

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k = 0.$$

Stąd wnioskujemy, że $\int_c^d f(x)\,dx = 0$, a ponieważ f jest całkowalna na przedziale $[c, d]$, więc

(1) $\int_c^d f(x)\,dx = 0.$

Ustalmy dalej dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ i znajdźmy podział przedziału $[a, b]$ na n równych części taki, żeby

$$(2) \quad \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i \leqslant (b-a)\varepsilon,$$

gdzie M_i oznacza kres górny funkcji f na i-tym z przedziałów otrzymanych w wyniku dzielenia $[a, b]$ na n równych części. Możliwość znalezienia takiego n wynika z faktu, że f jest całkowalna na $[a, b]$ oraz $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Oznaczmy przez P_1 ten z wyżej opisanych przedziałów, dla którego

$$\sup_{x \in P_1} f(x) = M = \min\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Wtedy z (2) mamy

$$(b-a)M = \frac{b-a}{n} n \cdot M \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i \leqslant (b-a)\varepsilon,$$

skąd $M \leqslant \varepsilon$. Zatem

$$f(x) \leqslant \varepsilon$$

dla $x \in P_1$.

Ponieważ z (1) wynika, że

$$\int_{P_1} f(x)\,dx = 0,$$

więc weźmy teraz podział przedziału P_1 na taką ilość równych części (przynajmniej dwie) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_P$, że

$$\frac{|P_1|}{n} \sum_{i=1}^{P} M_i \leqslant \frac{\varepsilon |P_1|}{2},$$

gdzie $|P_1|$ oznacza długość przedziału P_1.

Podobnie jak poprzednio, znajdźmy taki przedział Q_k, żeby $M_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Oznaczmy ten przedział Q_k przez P_2. Oczywiście

$$f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $x \in P_2$.

Postępowanie to kontynuujemy indukcyjnie wyznaczając ciąg przedziałów domkniętych $\{P_n\}$, który jest zstępujący i taki, że $|P_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|P_n|$ (więc $\lim_{n \to \infty} |P_n| = 0$). Ponadto

$$f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$$

dla $x \in P_n$.

Na podstawie twierdzenia Cantora (zob. zad. 98, rozdz. V) wnioskujemy, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ składa się dokładnie z jednego punktu x_0. Oczywiście $0 \leqslant f(x_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem $f(x_0) = 0$. Jest to jednak sprzeczne z faktem, że f jest dodatnia na przedziale $[a, b]$.

Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

257. Załóżmy najpierw, że

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że zbiór miejsc zerowych funkcji f jest gęsty w $[a, b]$. Wtedy, biorąc podział $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ przedziału $[a, b]$ wnioskujemy, że w każdym z przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ znajduje się przynajmniej jedno miejsce zerowe funkcji f, a zatem $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Stąd

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0,$$

a więc także

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób sprzeczność z założeniem.

Na odwrót, załóżmy teraz, że zbiór miejsc zerowych funkcji f nie jest gęsty w $[a, b]$. Wtedy znajdziemy przedział $[c, d] \subset [a, b]$ taki, że f nie ma miejsc zerowych w $[c, d]$, a więc jest dodatnia w tym przedziale. Z zadania 256 wynika, że

$$\inf_{[c,d]} f(x) > 0.$$

Stąd

$$\int_c^d f(x)\,dx \geqslant (d-c) \inf_{[c,d]} f(x) > 0$$

i w konsekwencji

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_c^d f(x)\,dx > 0,$$

ponieważ f jest z założenia nieujemna na przedziale $[a, b]$.

Uzyskana nierówność kończy dowód.

258. Wskazówka: Skorzystać z zad. 256.

259. Wskazówka: Zauważyć, że

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)\,dx$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

260. Weźmy dowolną liczbę $t \in [0, b-a]$. Wtedy, wykorzystując wklęsłość funkcji f, mamy

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+t}{2} + \frac{b-t}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}[f(a+t)+f(b-t)].$$

Całkując tę nierówność względem t w przedziale $[0, b-a]$, otrzymujemy

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left\{\int_0^{b-a} f(a+t)\,dt + \int_0^{b-a} f(b-t)\,dt\right\}.$$

Stosując prostą zamianę zmiennych łatwo pokazać, że

$$\int_0^{b-a} f(a+t)\,dt = \int_0^{b-a} f(b-t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Stąd otrzymujemy

$$(1)\quad (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

Weźmy teraz sieczną łączącą końce wykresu funkcji $y = f(x)$ na przedziale $[a, b]$. Równanie tej siecznej ma postać

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

Z wklęsłości funkcji f wynika, że sieczna leży pod wykresem funkcji na przedziale $[a, b]$. Stąd otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\right]dx =$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

Łącząc wyżej otrzymaną nierówność z nierównością (1) kończymy dowód.

261. Oznaczmy $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ponadto, niech

$m'_k = \inf\{f'(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$,
$M'_k = \sup\{f'(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$,

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Zapiszmy Δ_n w postaci

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x)-f(x_k)]\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-x_k) f'(c_k)\,dx,$$

gdzie $x < c_k < x_k$, $x_0 = a$.

Korzystając z nierówności

$$M_k'(x-x_k) \leqslant (x-x_k)f'(c_k) \leqslant m_k'(x-x_k)$$

otrzymujemy

$$-\frac{b-a}{2}S_n' \leqslant n\Delta_n \leqslant -\frac{b-a}{2}s_n',$$

gdzie s_n' i S_n' oznaczają sumę dolną i górną dla funkcji f' na przedziale $[a,b]$. Stąd, ponieważ f' jest całkowalna na $[a,b]$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\Delta_n = -\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a)-f(b)\big).$$

262. Ustalmy liczbę $\delta > 0$ i rozbijmy przedział $[0,1]$ na przedziały o długości $\Delta x_i \leqslant \delta$. Niech n będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Wszystkie przedziały danego w ten sposób podziału podzielimy na dwie klasy:

(a) Do pierwszej klasy zaliczymy te przedziały, w których leżą liczby $\frac{p}{q}$ o mianownikach $q \leqslant n$. Liczb tych jest oczywiście skończenie wiele, więc oznaczając ich ilość przez k_n widzimy, że w pierwszej klasie nie może być więcej przedziałów niż $2k_n$ (ponieważ jedna liczba może należeć do co najwyżej dwóch przedziałów jednocześnie), a suma ich długości nie przekracza $2k_n\delta$.

(b) Do drugiej klasy zaliczamy te przedziały, które nie zawierają liczb wspomnianej postaci. Oscylacja ω_i funkcji f (Riemanna) w każdym z tych przedziałów jest nie większa niż $\frac{1}{n}$.

Jeżeli teraz sumę $\Sigma\,\omega_i\Delta x_i$ rozbijemy odpowiednio na dwie sumy (w kontekście wyżej opisanych klas), a następnie oszacujemy każdą z tych sum z osobna, to otrzymamy

$$\Sigma\,\omega_i\Delta x_i \leqslant 2k_n\delta + \frac{1}{n}.$$

Biorąc następnie liczbę $\varepsilon > 0$ i dobierając n tak, żeby $n \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$ oraz $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{4k_n}$ widzimy, że $\Sigma\,\omega_i\Delta x_i \leqslant \varepsilon$, co na podstawie twierdzenia umieszczonego na początku części C, rozdz. XII, oznacza, że funkcja Riemanna f jest całkowalna na przedziale $[0,1]$.

Czytelnik pokaże już bez trudu, że $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

263. Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Korzystając z całkowalności funkcji f na przedziale $[a,b]$, znajdziemy podział $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ przedziału $[a,b]$ na n podprzedziałów jednakowej długości $\delta = \frac{b-a}{n}$ tak, żeby $\delta\sum_{i=1}^{n}\omega_i < \frac{\varepsilon}{2}$, gdzie ω_i oznacza oscylację funkcji f na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (zob. twierdzenie z części C, rozdz. XII).

Weźmy teraz liczbę h taką, że $0 \leqslant h \leqslant \delta$. Wtedy $|f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega_i + \omega_{i+1}$ dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i < n$ oraz $|f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega_n$ dla $x \in [x_{n-1}, x_n]$.

Stąd otrzymujemy

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x+h) - f(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \delta\left[(\omega_1 + \omega_2) + (\omega_2 + \omega_3) + \ldots + (\omega_{n-1} + \omega_n) + \omega_n\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta \sum_{i=1}^{n} \omega_i < \varepsilon.$$

Analogiczną nierówność możemy również uzyskać dla $-\delta \leqslant h \leqslant 0$. Koniec dowodu.

264. Ponieważ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1} = A,$$

więc biorąc pod uwagę przyjęte założenia i korzystając z twierdzenia de l'Hospitala, otrzymujemy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1} = A.$$

U w a g a. Wersja twierdzenia de l'Hospitala, z której wyżej skorzystaliśmy, znajduje się np. w podręczniku A. Birkholca, cytowanego w literaturze jako pozycja [2].

265. Korzystając z nierówności Schwarza (zad. 246), dla $x \in [a, b]$ mamy:

$$\left|\int_0^x f'(t) \cdot 1\, dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^x [f'(t)]^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_a^x 1^2 dt},$$

skąd (ponieważ $f(a) = 0$) otrzymujemy

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{x-a} \cdot \sqrt{\int_a^x [f'(t)]^2 dt} \leqslant \sqrt{(b-a)\int_a^b [f'(t)]^2 dt}.$$

Ponieważ wyżej napisana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $x \in [a, b]$, zatem

$$M \leqslant \sqrt{(b-a)\int_a^b [f'(t)]^2\, dt}$$

i koniec dowodu.

ROZDZIAŁ XIII

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE. WARTOŚĆ GŁÓWNA CAŁKI

1. $\frac{1}{3}$. **2.** Rozbieżna. **3.** 0. **4.** π.

5. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int\limits_0^{\infty} z\,dz$, więc nasza całka jest rozbieżna.

6. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-z}dz = -e^{x}\big|_0^{+\infty} = 1.$

7. Rozbieżna.

8. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = \lim\limits_{A\to\infty} \frac{-\sin x - \cos x}{2} e^{-x}\Big|_0^{A} = \frac{1}{2}.$

9. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **10.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **11.** Zbieżna.

12. Zbieżna. Wystarczy skorzystać z nierówności
$1+x^2 \leqslant e^x$ dla $x \geqslant 0$.

13. Rozbieżna. Wystarczy skorzystać z następującego oszacowania:

$$\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)} = \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x} \geqslant \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x-1}.$$

14. Rozbieżna.

Wskazówka: Wykorzystać oszacowanie

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx = \int\limits_0^{1} \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx \geqslant \int\limits_0^{1} \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx + \frac{\pi}{\sqrt[3]{24}} \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

15. $\frac{8}{3}$. **16.** Rozbieżna. **17.** $-\frac{1}{4}$.

18. 1. **19.** 2. **20.** $\frac{33\pi}{2}$.

21. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = -\int\limits_{-1}^{-\infty} xe^x\,dx = (xe^x - e^x)\Big|_{-\infty}^{-1} = \frac{2}{e}$.

22. Wskazówka: Aby udowodnić zbieżność należy wykorzystać nierówność

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

23. Korzystając z nierówności

$$\sqrt{x}+1 < e^{\sqrt{x}} \text{ dla } x > 0,$$

otrzymujemy

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Zatem całka jest zbieżna.

24. Mamy następujące oszacowanie

$$2\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x} \geqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-1} = \int\limits_0^{e-1} \frac{dx}{(x+1)x} = \ln\frac{x}{x+1}\Big|_0^{e-1} = +\infty.$$

25. Zbieżna. **26.** $1+\pi/4$. **27.** $1-\ln 2$. **28.** $\pi/4$.

29. **a)** $\frac{\pi}{16\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{16}$, **b)** $3/2$, **c)** $\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot a^{2n}}$,

d) 0, **e)** $-\frac{1}{8}$, **f)** $n!\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\ln(k+1)$, **g)** $\pi/8$, **h)** $\frac{2}{3}\ln 2$.

30. $I = 1/3$.

35. **a)** Podstawiając $\operatorname{tg} x = t$, mamy

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t^2)}.$$

Następnie, podstawiając $z = \sqrt{t}$, otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{z^2-1}{1+z^4}\,dz = 0.$$

Stąd, wiedząc, że $\int\limits_0^\infty \frac{2z^2}{1+z^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, otrzymujemy żądany wynik.

b) Wskazówka: Zastosować wzór

$$\int uv^{(n)}dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} + \ldots +$$
$$+(-1)^k \cdot u^{(k)}v^{(n-k-1)} + (-1)^{k+1}\int u^{(k+1)}v^{(n-k-1)}dx.$$

c) Wskazówka: Zastosować całkowanie przez części oraz skorzystać z równości

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

d) Wskazówka: Scałkować przez części oraz wykorzystać wynik

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

36. Niech $y = Ax - \frac{B}{x}$. Wtedy otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\,dy = \int_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right]\left(A + \frac{B}{x^2}\right)dx =$$
$$= A\int_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right]dx + B\int_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x^2}.$$

Podstawiając $x = \frac{-B}{At}$ pokazujemy, że ostatnia całka jest równa

$$A\cdot\int_0^\infty f\left[\left(At - \frac{B}{t}\right)^2\right]dt.$$

Stąd otrzymujemy

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\,dy = A\int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right]dx,$$

co kończy dowód (po uwzględnieniu parzystości funkcji podcałkowej).

37. **a)** 0, **b)** $-\ln 2$, **c)** 0, **d)** π, **e)** 0.

42. Wskazówka: Wykorzystać kryterium Dirichleta z zad. 41.

43. Całka jest zbieżna dla każdego $\lambda \in (0, 2)$.
Wskazówka: Zastosować kryterium Dirichleta i skorzystać z tego, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

44. Całka jest zbieżna dla $\lambda \in (0, 1)$.

45. Wskazówka: Skorzystać z zad. 55, rozdz. VII.

46. Całka jest zbieżna dla $\beta > \alpha + 1$.

47. Zbieżna dla $\alpha \in (0, 1)$.
Wskazówka: Zastosować kryterium Dirichleta.

48. Zbieżna.
Wskazówka: Pokazać, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \cos\frac{x}{n} + \cos\frac{2x}{n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)x}{n}}{n} = \frac{\sin x}{x}.$$

50. Wskazówka: Porównać zad. 49.

51. Ustalmy $a > 0$. Zauważmy, że $\int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x}\,dx$. Gdyby całka $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x}\,dx$ była zbieżna, to po dodaniu do niej całki zbieżnej $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ (por. zad. 42) otrzymalibyśmy, jako wniosek, że całka $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x}$ jest zbieżna. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że całka $\int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ jest rozbieżna, a więc rozważana w zadaniu całka jest także rozbieżna.

52. Gdyby całka $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ była bezwzględnie zbieżna, to na mocy nierówności

$$\sin^2 x \leqslant |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

byłaby też zbieżna całka

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$$

Przeczy to jednak odpowiedzi do zad. 51.

54. Podstawiając $x = ae^y$, otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\ln x\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(e^y+e^{-y})\,[y+\ln a]\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} yf(e^y+e^{-y})\,dy + \ln a \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^y+e^{-y})\,dy.$$

Zauważmy teraz, że $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(e^y+e^{-y})\,dy = 0$, co jest konsekwencją nieparzystości funkcji podcałkowej. Ponadto, podstawiając $x = ae^y$ otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(e^y+e^{-y})\,dy = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x},$$

co kończy dowód.

55. a) Napiszmy

$$\int_0^{\infty} f(x^p+x^{-p})\ln x\frac{dx}{x} = \int_0^1 f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{x} + \int_1^{\infty} f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{x}.$$

Następnie, podstawiając w ostatniej całce $x = \frac{1}{t}$ otrzymujemy

$$\int_1^{\infty} f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{x} = -\int_0^1 f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{x}$$

i koniec dowodu.

b) Dowód tej równości pozostawiamy Czytelnikowi.

56. Wskazówka: Skorzystać ze wzorów:

$$\int x^n e^{-x}\sin x\,dx = -x^n\,\frac{\sin x+\cos x}{2}\cdot e^{-x} +$$

$$+\frac{n}{2}\int x^{n-1}e^{-x}\sin x\,dx + \frac{n}{2}\int x^{n-1}e^{-x}\cos x\,dx,$$

$$\int x^n e^{-x}\cos x\,dx = x^n\,\frac{\sin x+\cos x}{2}\cdot e^{-x} -$$

$$-\frac{n}{2}\int x^{n-1}e^{-x}\sin x\,dx + \frac{n}{2}\int x^{n-1}e^{-x}\cos x\,dx,$$

dla $n\in\mathbb{N}$.

57. Dowód rozbieżności wskazanych całek jest rzeczą prostą i pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Dalej, ustalmy dowolnie $A > 1$ i oznaczmy $n = [A]$. Wtedy oczywiście $n \leqslant A < n+1$ (por. zad. 11, rozdz. III). Mamy więc

$$(*)\quad \int_1^n \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx \leqslant \int_1^A \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx \leqslant \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx,$$

ponieważ funkcja podcałkowa jest nieujemna.

Ponadto, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ otrzymujemy:

$$\int_1^k \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{i=1}^{k-1} \int_i^{i+1} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \int_i^{i+1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{i} - \ln\frac{i+1}{i}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k-1} - \ln(k-1).$$

Stąd i z $(*)$ otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln(n-1) \leqslant \int_1^A \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Korzystając z powyższej nierówności oraz z zad. 55, rozdz. VI, otrzymujemy, że

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx = \gamma.$$

58. $1 - \gamma$.

W s k a z ó w k a: Przeprowadzić podobne rozumowanie jak w rozwiązaniu zad. 57.

59. Zauważmy, że jedynym punktem osobliwym jest $x = r$. Następnie skorzystajmy z tożsamości

$$\frac{2x}{x^2 - r^2} = \frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r}.$$

Teraz, biorąc pod uwagę, że

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x+r} dx = \cos ax \int_r^{\infty} \frac{\sin ay}{y} dy - \sin ax \int_r^{\infty} \frac{\cos ay}{y} dy$$

widzimy, że wyżej napisana całka jest zbieżna (por. zad. 43 i 44).

Dalej, ustalając $\varepsilon > 0$, mamy:

$$\int_0^{r-\varepsilon} \frac{\sin ax}{x-r}\,dx + \int_{r+\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin ax}{x-r}\,dx = \cos ar \int_r^{\infty} \frac{\sin ay}{y}\,dy +$$

$$+\sin ar \int_r^{\infty} \frac{\cos ay}{y}\,dy + 2\cos ar \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\sin ay}{y}\,dy.$$

Ostatecznie

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{2x\sin ax}{x^2-r^2}\,dx = 2\cos ar \int_0^{\infty} \frac{\sin ay}{y}\,dy = \pi\cos ar.$$

60. Przekształcamy naszą całkę w następujący sposób:

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{dx}{(x+n\pi)^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^{\alpha}} \int_0^{\pi} \frac{dx}{|\sin x|^{\beta}}.$$

Ponieważ szereg po prawej stronie jest zbieżny dla $\alpha > 1$, a całka

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{|\sin x|^{\beta}}$$

jest zbieżna dla $\beta \in (0, 1)$, więc widzimy, że nasza całka jest zbieżna dla $\alpha \in (1, +\infty)$ i $\beta \in (0, 1)$.

Z drugiej strony mamy nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((n+1)\pi)^{\alpha}} \int_0^{\pi} \frac{dx}{|\sin x|^{\beta}} \leqslant \int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}.$$

Analiza lewej strony powyższej nierówności prowadzi do wniosku, że rozważana w zadaniu całka jest rozbieżna dla $\beta \geqslant 1$ i $\alpha \in (0, 1]$.

61. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f(x) \to 0$ przy $x \to +\infty$. Pozwala to z kolei założyć, że f jest stałego znaku na przedziale $[0, +\infty)$. Załóżmy np., że f jest dodatnia.

Mamy teraz, dla ustalonego dowolnie $h > 0$:

$$\int_h^{(n+1)h} f(x)\,dx \leqslant h[f(h)+f(2h)+ \dots +f(nh) \leqslant \int_0^{nh} f(x)\,dx.$$

Stąd, przy $n \to \infty$ otrzymujemy

$$\int_h^\infty f(x)\,dx \leqslant h \sum_{n=1}^\infty f(nh) \leqslant \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Powyższe nierówności dają żądaną równość.

Uwaga. Z podanego dowodu widać, że założenie o monotoniczności funkcji f na przedziale $[0, \infty)$ można osłabić, żądając, żeby f była monotoniczna na pewnym przedziale $[A, \infty)$.

62. Weźmy, zgodnie ze wskazówką, funkcję $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Łatwo sprawdzić, że f jest malejąca na przedziale $[0, \infty)$. Ponadto

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \ln 2.$$

Stosując teraz udowodniony w zad. 61 związek, mamy:

$$\ln 2 = \lim_{h\to 0} h \sum_{n=1}^\infty f(nh) = \lim_{h\to 0} h \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-hn}}{1+e^{-hn}}.$$

Po podstawieniu $t = e^{-h}$ otrzymujemy dalej

$$\ln 2 = \lim_{t\to 1^-} (-\ln t) \sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{1+t^n}.$$

Stąd, po uwzględnieniu łatwej do sprawdzenia równości

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{-\ln t}{1-t} = 1,$$

otrzymujemy naszą równość.

63. Wskazówka: Porównaj wskazówkę do naszego zadania oraz rozwiązanie zad. 62.

64. a) Oznaczmy $A_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Wtedy można pokazać, że

$$A_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} A_n.$$

Z powyższego związku oraz z równości

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

można już wydedukować żądaną równość.

b) Korzystając z zad. 36 mamy

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a}{x^2}\right)}\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

c) Oznaczmy: $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$, $I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx$. Podstawiając w I_2 $t = \pi - x_1$ otrzymujemy, że $I_1 = I_2$. Zatem

$$2I_1 = I_1 + I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx - \ln 2\int\limits_0^{\pi/2} dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$$

Następnie, po podstawieniu w ostatniej całce $t = 2x$, otrzymujemy

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t\,dt\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = I_1.$$

Ostatecznie

$$2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

skąd $I_1 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

d) Wskazówka: Podstawić $x = \sin t$ i skorzystać z punktu c.

e) Wskazówka: Podstawić $x = -\ln\sin t$ i skorzystać z punktu c.

f) Po podstawieniu $a = \sin t$ mamy

$$\sin^2 x - a^2 = \sin^2 x - \sin^2 t = \sin(x+t)\sin(x-t).$$

Stąd

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln|\sin^2 x - a^2|\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln|\sin(x+t)|\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} \ln|\sin(x-t)|\,dx =$$

$$= \int\limits_t^{t+\pi/2} \ln|\sin u|\,du + \int\limits_{-t}^{-t+\pi/2} \ln|\sin u|\,du = 2\int\limits_0^{\pi/2} \ln|\sin u|\,du.$$

Oczekiwany wynik otrzymamy korzystając z punktu c.

65. Ustalmy dowolne m, M takie, że $0 < m < M$. Wtedy

$$\int_m^M \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_m^M \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_m^M \frac{f(bx)}{x}\,dx =$$

$$= \int_{am}^{aM} \frac{f(z)}{z}\,dz - \int_{bm}^{bM} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{am}^{bm} \frac{f(z)}{z}\,dz - \int_{aM}^{bM} \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

Z drugiej strony, mamy z definicji:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{m\to 0} \int_{am}^{bm} \frac{f(z)}{z}\,dz - \lim_{M\to\infty} \int_{aM}^{bM} \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

Korzystając teraz z twierdzenia o wartości średniej dla całki, otrzymujemy:

$$\int_{am}^{bm} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(\xi) \int_{am}^{bm} \frac{dz}{z} = f(\xi)\ln\frac{b}{a}, \text{ gdzie } \xi\in[am, bm],$$

$$\int_{aM}^{bM} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(\eta) \int_{aM}^{bM} \frac{dz}{z} = f(\eta)\ln\frac{b}{a}, \text{ gdzie } \eta\in[aM, bM].$$

Jeżeli $m\to 0$ oraz $M\to\infty$, to oczywiście $\xi\to 0$ oraz $\eta\to\infty$, więc stąd otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = [f(0)-f(\infty)]\ln\frac{b}{a}.$$

67. **a)** $\ln\frac{b}{a}$, **b)** $\ln\left(1+\frac{q}{p}\right)\ln\frac{b}{a}$, **c)** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$, **d)** $\ln\frac{b}{a}$.

68. Rozważmy funkcję

$$y(a) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx,\quad a\in\mathbb{R}.$$

Zauważmy, że $y(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

Następnie, różniczkując względem a, otrzymamy

$$y' = -2\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2ax\,dx.$$

Stąd, po scałkowaniu przez części, otrzymamy

$$y' = \left[e^{-x^2}\sin 2ax\right]_0^\infty - 2a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx,$$

co daje w konsekwencji

$$y' = -2ay.$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe, otrzymamy $y = Ce^{-a^2}$, gdzie C jest stałą. Aby wyznaczyć tę stałą wystarczy skorzystać z faktu, że $y(0) = \sqrt{\pi}/2$. Ostatecznie

$$y(a) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

69. a) Weźmy funkcję $y = y(a)$ określoną w następujący sposób:

$$y(a) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

Załóżmy najpierw, że $a \geqslant 0$.

Różniczkując powyższą równość względem a, otrzymamy

$$y' = -\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

Ponieważ jednak

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx \ (a > 0),$$

więc po dodaniu stronami otrzymamy

$$y' + \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} dx.$$

Powtarzając jeszcze raz operację różniczkowania względem a, mamy

$$y'' = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = y.$$

Rozwiązanie ogólne otrzymanego równania różniczkowego ma postać

$$y = C_1 e^a + C_2 e^{-a},$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi. Ponieważ jednak

$$|y(a)| = \left| \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx \right| \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

dla dowolnego $a \geqslant 0$, więc możemy stąd wywnioskować, że $C_1 = 0$. Z drugiej strony

$$C_2 = y(0) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ostatecznie, dla $a \geqslant 0$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

co pozwala wywnioskować, że

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|},$$

dla $a \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{\pi}{2}e^{-|a|}\operatorname{sgn} a$.

Wskazówka: Zastosować metodę z punktu a.

71. Niech $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{N} \\ x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ponieważ dla ustalonego dowolnie $A > 1$ mamy $\int_1^A f(x)\,dx = 0$, więc

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 0.$$

Oczywiście $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nie istnieje.

72. Przykładem takiej funkcji może być funkcja z rozwiązania zad. 71.

Rozdział XIV

ZASTOSOWANIA RACHUNKU CAŁKOWEGO

1. $P = \dfrac{1}{3}$.

2. $P = \int\limits_1^e (\ln x - \ln^2 x)\,dx = x \ln x \big|_1^e - \int\limits_1^e dx - x\ln^2 x\big|_1^e +$

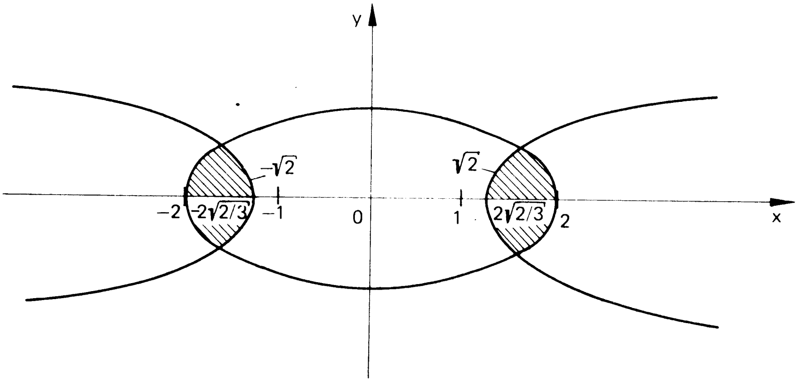
$+2\int\limits_1^e \ln x\,dx = 3-e.$

3. Zauważmy, że wykresy $y = x^2$, $y = x^3$ mają punkty wspólne, gdy $x^2 = x^3$. Stąd $x_1 = 0$ lub $x_2 = 1$. Zatem

$$P = \int\limits_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

4. $P = \dfrac{1}{12}$. **5.** $P = 142\dfrac{2}{3}$. **6.** $2\pi + \dfrac{4}{3}$.

7. Na rysunku 22 pokazano pole, które należy obliczyć.



Rys. 22

Punkty wspólne krzywych wyznaczymy z układu równań:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ, mamy

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad x_2 = -2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Pole zaznaczone na rysunku obliczymy ze wzoru:

$$P = 4\left(\int_{2}^{2\sqrt{2/3}} \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}\, dx + \int_{2\sqrt{2/3}}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^4}{4}\, dx}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{x^2}{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 2}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2/3}} + \frac{1}{4}x\sqrt{4 - x^2} +\right.$$

$$\left. + \arcsin\frac{x}{2}\Bigg|_{2\sqrt{2/3}}^{2}\right) = 2\left(\pi - 2\arcsin\sqrt{2/3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3\right).$$

8. $P = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$.

9. Obliczając pole rozważanej figury należy obliczyć całkę względem zmiennej y, zatem mamy:

$$P = \int_{1}^{0} y^2(y-1)\, dy = \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3\Bigg|_{1}^{0} = \frac{1}{12}.$$

10. $P = 73\dfrac{1}{7}$. **11.** $P = 1$.

12. Wyznaczając granice całkowania zauważmy, że

$$0 = x(x-1)^2.$$

Stąd $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Zatem pole rozważanej pętli wyraża się wzorem

$$P = 2\int_{1}^{0} \sqrt{x}(x-1)\, dx = 2\left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]\Bigg|_{1}^{0} = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{8}{15}.$$

13. a) Zauważmy, że rozważana figura jest symetryczna względem osi Ox i Oy. Zatem pole wyraża się zależnością

$$P = 4\int_{0}^{1} (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{3}{4}.$$

Uwaga. Powyższą całkę obliczamy podstawiając $x = \sin t$.

b) $P = \dfrac{4}{3}$, **c)** $P = \dfrac{\pi}{4}$.

14. Z równań parametrycznych krzywej mamy

$$dx = a(1-\cos t)\,dt.$$

Stąd

$$P = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-2\cos t+$$

$$+\cos^2 t)\,dt = a^2\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin^2 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

15. $P = \pi ab.$ **16.** $P = \frac{3}{8}\pi a^2.$ **17.** $P = 6\pi a^2.$

18. a) Obliczając granice całkowania należy przyrównać współrzędną y do zera. Zatem $3t-t^3 = 0$, skąd $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{3}$. Następnie

$$P = 2\int_0^{\sqrt{3}} (3t-t^3)\,6t\,dt = 2\left(6t^3-\frac{6}{5}t^5\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{72\sqrt{3}}{5}.$$

b) $P = \frac{8}{15}.$

19. $P = \frac{3\pi}{8}\cdot\frac{c^4}{ab}.$ **20.** $P = \pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right).$

21. Korzystamy ze wzoru na pole we współrzędnych biegunowych

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$$

gdzie $r = r(\varphi)$ — równanie krzywej we współrzędnych biegunowych; α, $\beta\in[0, 2\pi]$. Stąd

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\varphi+b)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2+b^2\right)\varphi+\frac{1}{4}a^2\sin 2\varphi+\right.$$

$$\left.+2ab\sin\varphi\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi(a^2+2b^2).$$

22. $P = 2a^2.$ **23.** $P = \frac{\pi a^2}{4}.$

24. Ponieważ pole jest ograniczone dwoma krzywymi danymi we współrzędnych biegunowych, zatem pole obszaru wyznaczonego przez warunki zadania obliczamy w następujący sposób:

$$P = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\varphi^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\operatorname{ctg}\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{\varphi}\Big|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \lim_{\varphi\to 0}\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\varphi - \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

25. $P = \frac{a^2}{8}(4-\pi)$.

26. Aby wyznaczyć granice całkowania, rozwiązujemy równanie

$3+\cos 4\varphi = 2-\cos 4\varphi$.

Stąd otrzymujemy, że $\varphi \in \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi\right]$. Dalej

$$P = \frac{1}{2}\left(\int_{2\pi/3}^{7\pi/6} (3+\cos 4\varphi)\,d\varphi - \int_{2\pi/3}^{7\pi/6} (2-\cos 4\varphi)\,d\varphi\right) = \frac{37}{6}\pi - 5\sqrt{3}.$$

27. $P = \frac{51\sqrt{3}}{16}$.

28. $P = a^2$.

Wskazówka: Napisać równanie lemniskaty we współrzędnych biegunowych.

29. $P = a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

30. $P = \frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$.

31. $P = a^2$.

32. $S = 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

33. $S = \ln 3 - \frac{1}{2}$.

34. $S = \ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$.

35. Zauważmy, że $x-x^2 \geqslant 0$. Stąd $x\in[0,1]$. Dalej mamy

$$S = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-2x+2x^2}}{x}\,dx = 2.$$

36. Na mocy założeń mamy:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)^2 + a^2\cos^2 t}\,dt = a\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{ctg} t\,dt =$$

$$= a\ln|\sin t|\Big|_{t_1}^{t_2} = a\ln\frac{y}{a}.$$

37. $S = \dfrac{\pi^2}{2} R.$

38. Przyrównując współrzędną y do zera, otrzymujemy $t - \dfrac{t^3}{3} = 0$. Stąd $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{3}$. Dalej mamy

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2}\, dt = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (1+t^2)\, dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

39. $S = \dfrac{\pi^3}{3}$.

40. $S = \ln\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{12}$.

41. $S = 8a$.

42. $S = \dfrac{3}{2}\pi a$.

43. Równanie tworzącej stożka ma postać $y = \dfrac{r}{h}x$. Zatem

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi h r^2.$$

44. **a)** Objętość rozważanej bryły wyraża się następująco:

$$V = 3\pi a b^2 \int_0^{2\pi} \cos^6 t \sin^2 t \cos t\, dt =$$

$$= 12\pi a b^2 \int_0^1 (1-z^2)^3 z^2\, dz = \frac{64}{105}\pi a b^2,$$

b) $V = \dfrac{64}{105}\pi a^2 b$.

45. **a)** $V = 2\pi \displaystyle\int_0^2 (4t - t^3)(1-t)\, dt = \frac{64}{35}\pi,$

b) $V = \dfrac{64\pi}{105}$.

46. Zauważmy, że asymptotą rozważanej krzywej jest prosta $y = 0$. Stąd

$$V = 2\int_0^\infty x^4 e^{-2x^2}\, dx = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Ponieważ jednak $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$, więc $V = 3\pi\sqrt{\pi}/32$.

47. $V=3\pi/10.$ **48. a)** $V=\frac{2}{3}\pi a^3,$ **b)** $V=\frac{\pi^2}{16}.$

49. $V=\pi^2/2.$

50. Pole powierzchni rozważanej bryły obrotowej obliczamy w następujący sposób:

$$P=2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\sqrt{(3a\sin^2 t\cos t)^2+(3a\cos^2 t(-\sin t))^2}\,dt=$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\sin t\cos t\,dt=\frac{12\pi a^2}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

51. $$P=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2 2\sin\frac{t}{2}\,dt=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

52. $V=\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$

53. $V=\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right].$

54. $V=\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2).$ **55.** $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})+\sqrt{5}\right).$

56. $S=\ln\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi.$ **57.** $S=\frac{e^2+1}{4}.$

58. $S=\frac{8}{27}p\left[\left(1+\frac{9y_0}{4p}\right)^{3/2}-1\right].$

59. $S=\frac{5a}{3\sqrt{3}}(2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})).$

60. $S=6a.$ **61.** $S=8a.$

62. $S=\frac{1}{2}a(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})).$

63. $S=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\cdot(r(\theta)-r(\varphi_0)).$

64. $S = 4a\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2+b^2}{a}\sin^2 t}\,dt.$

65. $P = \frac{4}{3}p^3.$ **66.** $P = \frac{1}{3}(6\pi+16)p^2.$

67. $V = 8a^3\ln\left(1-\frac{b}{2a}\right)-\frac{1}{3}b^3-ab(4a+b).$

68. $V = \frac{\pi}{5(1-e^{-\pi})}.$ **69.** $V = \frac{1}{6}\pi a^3(9\pi-16).$

70. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right)} =$

$= e^{\int\limits_0^1 \ln x\,dx} = e^{-1},$

b) 2, **c)** $\frac{2}{a}$, **d)** $\frac{1}{4}\pi$, **e)** $\frac{1}{3}\pi$, **f)** $4e^{-1}$, **g)** $\frac{1}{m+1}$.

71. Korzystając z definicji pracy oraz definicji całki oznaczonej, mamy

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

72. $L = 353250\,\mathrm{kGm}.$

73. Korzystając z zależności podanej w zad. 71, otrzymujemy:

$$L = \int\limits_a^b \frac{ceE}{x^2}\,dx = ceE\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^b = ceE\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

74. $L \approx 26800\,\mathrm{kGm}.$ **75.** $L = \frac{\pi\gamma h^2}{12}(R^2+3r^2+2Rr).$

76. $F \approx 0{,}52\,\mathrm{N}.$ **77.** $F \approx 0{,}17\,\mathrm{MN}.$

78. $F \approx 2{,}3\,\mathrm{MN}.$

79. Zauważmy, że

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{1}\binom{n}{0}-\frac{1}{3}\binom{n}{1}+\frac{1}{5}\binom{n}{2}-\ldots\pm\frac{1}{2n+1}\binom{n}{n}.$$

Na mocy powyższej tożsamości mamy

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\,2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}.$$

Wobec powyższych równości otrzymujemy żądany wynik.

80. Dowód nie wprost: Przyjmijmy, że $f(x) > 0$ dla dowolnego $x \in [a, b]$. Wtedy suma całkowa

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) > 0, \text{ gdzie } \xi_k \in \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Zatem $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ i sprzeczność.

Analogicznie pokazujemy, że niemożliwe jest, aby $f(x) < 0$ dla $x \in [a, b]$.

81. Niech $f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n$. Wtedy, wykorzystując założenie, otrzymujemy

$$\int_0^1 f(x)\,dx = C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0.$$

Zgodnie z rezultatem z zad. 80 pozwala to wywnioskować, że istnieją punkty $a_1\, b_1 \in [0, 1]$ takie, że $f(a_1)\, f(b_1) < 0$.

Stosując twierdzenie Darboux o funkcji ciągłej, otrzymujemy żądany wynik.

82. b) Podstawmy

$$(*) \quad \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos\beta\right) = 1.$$

Stąd

$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{x^2+1} + \cos\beta}{x - \sqrt{x^2-1}\cos\beta}.$$

Różniczkując obustronnie powyższą równość, mamy

$$\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\sin\beta\, d\beta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos\beta\right)^2}$$

i dalej

$$\sin\varphi = \frac{\sin\beta}{x - \sqrt{x^2-1}\cos\beta}.$$

Zatem

$$d\varphi = \frac{d\beta}{x - \sqrt{x^2-1}\cos\beta}.$$

Na mocy powyższej równości i $(*)$ mamy zależność

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi = \frac{d\beta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos\beta\right)^{n+1}},$$

którą obustronnie całkujemy od 0 do π, co daje dowodzoną tożsamość.

d) Przyjmijmy, że

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Stąd

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha).$$

Korzystając z faktu, że $\varphi(\cos(x+2\pi)) = \varphi(\cos x)$, mamy

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(\cos x)\,dx = \int_{0}^{2\pi} \varphi(\cos x)\,dx.$$

Ponadto

$$\int_{0}^{2\pi} \varphi(a\cos\theta + b\sin\theta)\,d\theta = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)\right)d\theta.$$

Po podstawieniu w całce po prawej stronie $\lambda = \theta-\alpha$, otrzymamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right)d\lambda = 2\int_{0}^{\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right)d\lambda.$$

Wobec dwóch kolejnych tożsamości otrzymujemy żądany wynik.

e) Obliczamy

$$(*) \quad \int_{0}^{\pi/2} g(\sin 2u)\cos u\,du = \int_{0}^{\pi/4} g(\sin 2u)\cos u\,du + $$
$$+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} g(\sin 2u)\cos u\,du.$$

Podstawmy w drugiej całce po prawej stronie $u = \frac{1}{2}\pi - u'$. Wtedy prawa strona $(*)$ jest równa

$$\int_{0}^{\pi/4} g(\sin 2u)(\cos u + \sin u)\,du.$$

Teraz w tej całce dokonajmy zamiany zmiennej, przyjmując $\sin 2u = \cos^2 v$. Różniczkując obie strony tej równości, mamy

$$\cos 2u\,du = -\sin v\cos v\,dv.$$

Ale $\cos 2u = \sqrt{1-\sin^2 2u} = \sqrt{1-\cos^4 v} = \sin v\cdot\sqrt{1+\cos^2 v}$, a także $1+\cos^2 v = 1+2\sin u\cos u = (\sin u+\cos u)^2$. Korzystając z ostatnich zależności, otrzymujemy

$$(\sin u + \cos u)\,du = -\cos v\,dv,$$

co daje pożądaną tożsamość.

83. a) Podstawiając w wyniku uzyskanym w zad. 261, rozdz. XII, $f(x) = x^m$, a za rozważany przedział przyjmując $[0, 1]$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}.$$

b) Postępując analogicznie jak w a przyjmijmy $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ oraz weźmy przedział $[0, 1]$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\ln 2 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)\right) = \frac{1}{4}.$$

84. $S = 4(a+b)\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2 t}\, dt.$

85. $S = 8a\dfrac{n+1}{n}.$ **87.** $P = \dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$ **88.** $P = \dfrac{3a^2}{2}.$

90. $P = \dfrac{1}{9}(b-a)(5y_1+8y_2+5y_3)$, gdzie y_1, y_2, y_3 są wartościami zmiennej y dla

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2}, \quad x_3 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

91. $P = \dfrac{64}{3}\pi a^2.$ **92.** $P = \sqrt{2}\pi.$ **93.** $P = 2a^2.$

94. $P = \dfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2).$ **95.** $P = \dfrac{1}{4}\pi a^2.$

96. $P = \dfrac{1}{2}a^2\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}\pi\right).$

97. $P = \dfrac{p^2}{1-e^2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_0}{2}\right) - \dfrac{2\sin\varphi_0}{2(1+e\cos\varphi_0)}\right].$

98. $$P = \frac{p^2}{1-e^2}\left[\frac{e\cos\varphi_0}{2(1+e\cos\varphi_0)} - \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\ln\frac{\sqrt{e+1}\cos\frac{1}{2}\varphi_0 - \sqrt{e-1}\sin\frac{1}{2}\varphi_0}{\sqrt{1+e\cos\varphi_0}}\right].$$

99. $P = 2\pi b^2 + 2\pi ab\dfrac{\arcsin C}{C}$, gdzie $C = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$

100. $P = \dfrac{2\pi ah}{b^2}\sqrt{a^2C^2h^2+b^4}+\dfrac{2\pi b^2}{C}\ln\dfrac{aCh}{b^2}+\dfrac{\sqrt{C^2h^2a^2+b^4}}{b^2}$,

$C = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$.

101. Korzystamy ze wzoru

$$V = \int_a^b P(x)\,dx,$$

gdzie $P(x)$ jest polem przekroju odpowiadającego odciętej x. Przekroju dokonujemy płaszczyzną prostopadłą do osi Ox.

Niech r, h będą wysokością i promieniem stożka, a łuk podstawy odcięty przez płaszczyznę ma kąt środkowy 2φ. Wtedy

$$V(\varphi) = \frac{1}{6}r^2h\left[2\varphi+\sin\varphi-\sin 2\varphi-\frac{1}{3}\sin 3\varphi\right].$$

102. $V = \dfrac{\pi a^3}{4}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+\sqrt{8})-\dfrac{2}{3}\right]$.

103. $P = 2\pi\ln(\sqrt{2}+1)+2\pi\sqrt{2}$.

104. $P = \dfrac{12}{5}\pi a^2$.

105. $P = \dfrac{32}{5}\pi a^2$.

106. $P = 2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

107. Zgodnie ze wzorem na pracę z zad. 71, mamy

$$L = \int_{R+h}^{+\infty}\frac{mgR^2}{x^2}dx = mgR^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{R+h}^{+\infty} = \frac{mgR^2}{R+h}.$$

Prędkość, jaką należy nadać ciału, by nie powróciło na Ziemię, wyznaczamy z zależności

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant mgR^2\int_R^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = mgR.$$

Stąd $v \geqslant \sqrt{2gR}$.

108. $F = \dfrac{3}{4}a^3\gamma$.

109. $F = \dfrac{2}{3}ab^2\gamma$.

110. $V = \dfrac{8}{3}\pi a^3$.

111. $V = \dfrac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6)a^3$.

112. Wskazówka: Skorzystać z uogólnionej nierówności Jensena

$$f(q_1y_1+q_2y_2+\ldots+q_ny_n) \leqslant q_1f(y_1)+q_2f(y_2)+\ldots+q_nf(y_n),$$

gdzie f jest funkcją wypukłą oraz $q_1, q_2, \ldots, q_n$ są takimi liczbami nieujemnymi, że $q_1+q_2+\ldots+q_n = 1$. Następnie wziąć dowolny podział $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ przedziału $[0, 1]$ i przyjąć $q_i = \Delta x_i$, $y_i = \varphi(c_i)$, gdzie c_i jest dowolnie obranym punktem pośrednim z przedziału $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. W dowodzie można również skorzystać z zad. 102, rozdz. VIII oraz następującej własności, która wynika w prosty sposób z zad. 258, rozdz. XII:

Jeżeli $f\colon [a, b] \to (c, d)$ jest funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$, to

$$(b-a)c < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)d.$$

113. a) Zauważmy, że dla $x \in [0, \pi/4]$ mamy

$$\operatorname{tg}^{n+1} x < \operatorname{tg}^n x.$$

Stąd

$$f(n+1) = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{n+1} x\,dx < \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x\,dx = f(n).$$

b) $f(n)+f(n-2) = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x\,dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx =$

$$= \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{n-2} x(\operatorname{tg}^2 x+1)\,dx = \int_0^1 t^{n-2}dt = \frac{1}{n-1}.$$

c) Wskazówka: Skorzystać z punktów a i b.

114. Na mocy nierówności Schwarza dla całek mamy:

$$I_{n-1}^2 = \left(\int_0^1 (f(x))^{n-1} dx\right)^2 =$$

$$= \left(\int_0^1 (f(x))^{n/2} (f(x))^{(n-2)/2} dx\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 (f(x))^n dx \int_0^1 (f(x))^{n-2} dx = I_n I_{n-2}.$$

115. a) Całkując przez części, otrzymujemy

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = xf^2(x)\Big|_a^b - 2\int_a^b xf'(x)f(x)\,dx = 1.$$

Stąd otrzymujemy oczekiwany wynik.

b) Korzystając z punktu **a** oraz z nierówności Schwarza otrzymujemy

$$\frac{1}{4} = \left(\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [f'(x)]^2 dx \int_a^b [xf(x)]^2\,dx.$$

116. Zauważmy, że jest prawdziwa następująca nierówność:

$$\sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx} \leqslant \sqrt[n]{(b-a)}\,M,$$

gdzie $M = \max\limits_{x \in [a, b]} f(x)$.

Ponadto istnieje przedział $\left[\frac{k-1}{n}(b-a), \frac{k}{n}(b-a)\right]$ oraz ξ z tego przedziału takie, że $f(\xi) = M$. Wtedy na mocy definicji całki otrzymujemy

$$\sqrt[n]{M^n \frac{b-a}{n}} - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx}$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

Wobec powyższych nierówności otrzymujemy tezę, gdy $\varepsilon \to 0$.

117. $P = \dfrac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. **118.** $V = \dfrac{32}{105}a^3$.

119. $V = \dfrac{1}{3} r \operatorname{ctg} \alpha [\sin \varphi (2 + \cos^2 \varphi - 3\varphi \cos \varphi)]$.

120. Wskazówka: Zauważyć, że $\varphi(x) > 0$ oraz $\psi(x) > 0$ dla $x \in [0, 1]$. Następnie skorzystać z zad. 112, przyjmując $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dla $x > 0$. W dowodzie należy skorzystać również z zad. 258, rozdz. XII.

121. Wskazówka: Zastosować wynik z zad. 80 oraz skorzystać z następującej równości

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(nx)\, dx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right),$$

którą można udowodnić stosując metodę całkowania przez części.

122. Obliczamy najpierw całkę $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$. Podstawmy $x = \operatorname{tg} t$. Wtedy

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} t)\, dt = \int_0^{\pi/4} \ln\left[\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\cos t}\right] dt =$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) dt - \int_0^{\pi/4} \ln \cos t\, dt = \frac{\pi}{8}\ln 2,$$

ponieważ, jak łatwo się przekonać, jest spełniona równość

$$\int_0^{\pi/4} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) dt = \int_0^{\pi/4} \ln \cos t\, dt.$$

Następnie wystarczy zastosować wynik zawarty w zad. 80.

123. Wskazówka: Czytelnika zainteresowanego tym zadaniem odsyłamy do drugiego tomu podręcznika G. M. Fichtenholza, cytowanego w Literaturze.

124. Wskazówka: Skorzystać z zad. 254, rozdz. XII, przyjmując $f(x) = x^{p-1}$.

125. Wskazówka: W zadaniu 254, rozdz. XII, przyjąć $f(x) = \ln(x+1)$.

126. Pozostawiamy Czytelnikowi pokazanie równości:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Następnie zauważmy, że dla $x \in (0,1)$ mamy

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} < \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^4} < \sqrt{1-x^2}.$$

Stąd już otrzymamy, że

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^4}\,dx <$$

$$< \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

127. Korzystamy z nierówności

$$\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t \leqslant t, \text{ dla } t \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right].$$

Stąd

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x^2\sin^2 t}\sin t\,dt \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-x^2t^2}\frac{4}{\pi^2}\cdot t\,dt = \frac{\pi^2}{8x^2}(1-e^{-x^2}).$$

128. Wskazówka: Zastosować całkowanie przez części.

b) Stosując nierówność Schwarza (por. zad. 246, rozdz. XII), mamy

$$\left(\int_0^x e^{t/2}\sqrt{e^t+e^{-2t}}\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^x e^t dt\right)\left(\int_0^x (e^t+e^{-2t})\,dt\right).$$

Stąd, po prostych rachunkach, otrzymujemy

$$\int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\,dt \leqslant \sqrt{(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}.$$

Ale $\sqrt{e^{2t}+e^{-t}} > e^t$ dla $t \in [0, +\infty)$. Zatem

$$e^x - 1 < \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}}\, dt.$$

Łącząc uzyskane nierówności otrzymujemy naszą nierówność.

129. Metodą indukcji można pokazać, że

$$f_n(x) = \int_0^x f_0(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt, \text{ gdzie } n = 1, 2, \ldots$$

Stąd

$$f_n(x) = x^{n-1} \int_0^x f_0(t) \frac{(1-t/x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$$

i dalej

$$f_n(x) = nx^{n-1} \int_0^x f_0(t) \frac{(1-t/x)^{n-1}}{n!}\, dt >$$

$$> nx^{n-1} \int_0^x f_0(t) \frac{(1-t/x)^n}{n!}\, dt = \frac{n}{x} f_{n+1}(x),$$

co kończy dowód.

130. Zauważmy, że jest prawdziwa nierówność

$$e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

Stąd

$$e^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Wykorzystując powyższą nierówność, otrzymujemy:

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} dx \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\, dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{2} \pi.$$

Teraz po podstawieniu $x = \dfrac{v}{\sqrt{n}}$ otrzymamy oczekiwaną nierówność.

131. a) Podstawiając $t^2 = u$ i następnie całkując przez części, mamy

$$f(x) = \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/4}}\, du.$$

Następnie wystarczy skorzystać z tego, że $-1 \leqslant \cos u \leqslant 1$.

b) Podstawiając w rozważanej całce $e^t = u$ i całkując przez części, otrzymamy:

$$f(x) = \frac{\cos e^x}{e^x} - \frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}} + \int\limits_{e^x}^{e^{x+1}} \frac{\cos u}{u} du.$$

Teraz wystarczy skorzystać z faktu, że $-1 \leqslant \cos u \leqslant 1$.

133. Zauważmy, że funkcja $xf(x)$ jest rosnąca. Zatem

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos(\ln x)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b xf(x)\frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant bf(b)\left|\int\limits_a^b \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx\right| = bf(b)\,|\sin(\ln b) - \sin(\ln a)| \leqslant$$

$$\leqslant 2bf(b).$$

134. Wskazówka: Skorzystać z definicji całki oznaczonej.

135. Korzystamy z nierówności

$$\frac{1}{2t} > \frac{2}{(1+t)^2} \quad \text{dla } t > 1.$$

Całkując obustronnie powyższą nierówność, otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^{x/y} \frac{dt}{t} \geqslant 2\int\limits_1^{x/y} \frac{1}{(1+t)^2}\,dt.$$

Stąd

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y} > \frac{x-y}{x+y} \quad (0 < y < x)$$

i koniec dowodu.

136. Mamy:

$$L = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 4\left(\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt\right).$$

Podstawiając w drugiej całce $z = \frac{\pi}{2} - t$, otrzymamy

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt = -\int_{\pi/4}^{0} \sqrt{a^2 \sin^2 z + b^2 \cos^2 z}\, dz =$$

$$= \int_{0}^{\pi/4} \sqrt{a^2 \sin^2 z + b^2 \cos^2 z}\, dz.$$

Teraz, wykorzystując twierdzenie o wartości średniej dla całek oraz fakt, że funkcje $t \to a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$, $z \to a^2 \sin^2 z + b^2 \cos^2 z$ są rosnące na przedziale $[0, \pi/4]$, otrzymujemy

$$\pi(a+b) < L < \pi\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Rozdział XV

SZEREGI LICZBOWE

1. 1.

2. Wobec tożsamości

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

otrzymujemy

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Stąd

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. $S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, $S = \frac{1}{3}$.

4. $S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$, $S = \frac{11}{18}$.

5. $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, $S = \frac{1}{4}$.

6. $S = \frac{3}{2}$.

7. $S_n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$, $S = \frac{1}{8}$.

8. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$.

9. $S = 3$.

10. $S = \frac{5}{36}$.

11. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

12. $\limsup_{n\to\infty} 2^{(-1)^n} = \infty$. **13.** $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\sin\frac{1}{n}\right) = 1$.

14. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) = 2$.

15. Szereg rozbieżny.

Wskazówka: Skorzystać z nierówności

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

16. Korzystając z nierówności $\sin\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, łatwo pokazać, że szereg jest zbieżny.

17. Szereg zbieżny.

Wskazówka: Skorzystać z nierówności

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

18. Z nierówności

$$\frac{2}{n} < \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-n\sqrt{n}}\right), \quad n\in\mathbb{N},$$

widzimy, że szereg jest rozbieżny.

19. Wskazówka: Skorzystać z nierówności

$\ln n \leqslant n-1$, $n\in\mathbb{N}$.

20. Szereg zbieżny.

Wskazówka: Skorzystać z nierówności

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

21. Wskazówka: Skorzystać z nierówności

$$\frac{1}{n\ln n} > \ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \quad \text{dla } n\in\mathbb{N} \text{ i } n>2.$$

22. Zbieżny. **23.** Rozbieżny.

Wskazówka do zad. 22 i 23: Skorzystać z nierówności z zad. 34, rozdz. IX.

24. Rozbieżny.

25. Rozbieżny.

Wskazówka: Skorzystać z nierówności $e^x > 1$ dla $x > 0$.

27. Wskazówka: Skorzystać z nierówności $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$ dla $x \in [0, \pi/2]$.

28. Wskazówka: Skorzystać z nierówności $\operatorname{tg} x \leqslant \frac{4}{\pi}x$ dla $x \in [0, \pi/4]$.

29. Wskazówka: Skorzystać z nierówności $\sin x \leqslant x$ dla $x \geqslant 0$.

30. Zbieżny.

31. Wskazówka: Skorzystać z nierówności z zad. 88, rozdz. IX.

32. Rozbieżny. **33.** Zbieżny.

34. Rozbieżny. **35.** Zbieżny.

36. Korzystając z nierówności $\ln(1+x) \leqslant x$ dla $x \geqslant -1$ (por. zad. 34, rozdz. IX) oraz z tego, że

$$\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \; n \in \mathbb{N},$$

otrzymujemy

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Stąd

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Zatem rozważany szereg jest zbieżny.

37. Zbieżny. **38.** Zbieżny. **39.** Zbieżny.

40. Zbieżny. **41.** Zbieżny. **42.** Rozbieżny.

43. Zbieżny.

44. Szereg rozbieżny dla $a > e$ i zbieżny dla $a < e$.

45. Rozbieżny. **46.** Zbieżny. **47.** Rozbieżny.

48. Zbieżny. **49.** Zbieżny. **50.** Zbieżny.

51. Zbieżny. **52.** Zbieżny. **55.** Zbieżny dla $s > 0$.

56. Rozbieżny. **57.** Zbieżny. **58.** Rozbieżny.

59. Zbieżny. **60.** Zbieżny. **61.** Zbieżny.

62. Zbieżny. **63.** Zbieżny. **64.** Zbieżny.

65. Zbieżny. **66.** Rozbieżny. **67.** Zbieżny.

68. Szereg jest zbieżny bezwzględnie dla $p > 1$ oraz zbieżny warunkowo dla $0 < p \leqslant 1$.

69. Dla $p > 1$ zbieżny bezwzględnie, a dla $0 < p \leqslant 1$ zbieżny warunkowo.

70. Zbieżny bezwzględnie dla $p > 1$ oraz warunkowo dla $1/2 < p \leqslant 1$.

71. Zbieżny bezwzględnie.

72. Zbieżny bezwzględnie dla $p > 1$ i warunkowo dla $0 < p \leqslant 1$.

73. Rozbieżny.

74. Szereg zbieżny bezwzględnie dla $p > 1$ oraz warunkowo dla $1/2 < p \leqslant 1$.

75. Rozbieżny. **76.** Rozbieżny.

79. a) Rozbieżny.

Wskazówka: Skorzystać z faktu, że $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ oraz twierdzenia, z którego wynika, że ciąg zbieżny jest ograniczony.

b) Rozbieżny; porównaj wskazówkę z punktu a.

c) Rozbieżny.

Wskazówka: Porównać wskazówkę do zad. 29.

d) Zbieżny dla $\sigma > 2$ oraz rozbieżny dla $\sigma \leqslant 2$.

80. Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2+4n+1} < \frac{1}{4(n^2+n)} = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4(n+1)}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} < \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)}\right) = \frac{1}{4}.$$

81. Wskazówka: Zauważmy, że

$$\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

Teraz wystarczy wyznaczyć sumę częściową naszego szeregu.

82. Korzystamy z tożsamości

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = -\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})^2}.$$

Stąd

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{n}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\,(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})^2}.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że otrzymany szereg jest zbieżny.

83. Zbieżny.

Wskazówka: Skorzystać ze wskazówki do zad. 29 oraz z faktu, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \text{ dla } n\in\mathbb{N}$$

(por. zad. 20, rozdz. VI).

84. Rozbieżny.

Uwaga. Porównać wskazówkę do zad. 27.

85. Wskazówka: Skorzystać z nierówności $\ln n \leqslant kn^{1/k}$ dla $k, n\in\mathbb{N}$ (por. zad. 34, rozdz. IX). Następnie, biorąc $k \geqslant 6$ otrzymamy, że badany szereg jest zbieżny.

86. Dla dostatecznie dużych n, $n\in\mathbb{N}$, zachodzi nierówność

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}.$$

Zatem szereg jest zbieżny.

87. Oznaczmy

$$x_n = \frac{\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n.$$

Mamy

$$\ln x_n = \ln n + n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right).$$

Korzystając z rozwinięcia funkcji $x \to \ln(1+x)$ w szereg potęgowy, otrzymujemy

$$\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+\alpha_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2,$$

gdzie $\alpha_n \to 0$ przy $n\to\infty$. Stąd

$$\ln x_n = \frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n}+\alpha_n\frac{\ln^2 n}{n} \to 0.$$

Zatem $x_n \to 1$, gdy $n\to\infty$, co oznacza, że rozważany szereg jest rozbieżny.

88. Zauważmy, że

$$\ln\frac{2n+1}{2n-1} = \ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right).$$

Korzystając z rozwinięcia funkcji $\ln(1+x)$ w szereg potęgowy, mamy dalej

$$\ln\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+\beta_n\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3,$$

gdzie $\beta_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Stąd otrzymujemy

$$n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1=\frac{2n+3}{3(2n-1)}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2+\beta_n\frac{8n}{2n-1}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2.$$

Z powyższej równości wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1}{\frac{1}{(2n-1)^2}}=\frac{1}{3},$$

co dowodzi, że badany szereg jest zbieżny.

89. Stosując twierdzenie Cauchy'ego o zagęszczaniu wnioskujemy, że wystarczy zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{2^{2k/2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k/2-k}}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta, otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{2^{k(\sqrt{2}-1)/2}}=0.$$

Zatem rozważany szereg jest zbieżny.

90. Mamy następujące oszacowanie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+(-1)^n)^n}{4^n}<\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Stąd oraz z kryteriów porównawczego i Cauchy'ego łatwo stwierdzamy, że nasz szereg jest zbieżny.

91. Mamy następujące oszacowanie (sprawdzić!)

$$\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{3/2}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Zatem szereg jest zbieżny.

92. Oznaczmy n-tą sumę częściową naszego szeregu przez S_n. Można pokazać, że

$$S_{2n}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Oczywiście ciąg $\{S_{2n}\}$ jest zbieżny do granicy właściwej s. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}} = 0,$$

więc ciąg $\{S_{2n+1}\}$ jest zbieżny do tej samej granicy s. Stąd wynika, że badany szereg jest również zbieżny do s.

93. Wobec warunku koniecznego zbieżności szeregu mamy, że dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takie, że dla $n > n_0$ zachodzi nierówność

$$na_n = ka_n+(n-k)a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n \leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

94. Korzystając ze wskazówki, otrzymujemy:

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{8}+2\sin\frac{\pi}{16}+2\sin\frac{\pi}{32}+\ldots \leqslant$$

$$\leqslant \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right) = \pi.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny.

95. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{n-\alpha}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n-\alpha}{n+1}\right)^n = -1-\alpha.$$

Zatem dla dowolnego $\alpha > 0$ nasz szereg jest rozbieżny.

96. Szereg rozbieżny.

Wskazówka: Zauważyć, że $(\ln n)^2 < n$ dla n odpowiednio dużych.

97. Z założenia istnieje $M > 0$ takie, że $a_n \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd $na_n \leqslant nM$, a więc $\dfrac{1}{na_n} \geqslant \dfrac{1}{M}\cdot\dfrac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{na_n}$ wynika więc z kryterium porównawczego i z rozbieżności szeregu harmonicznego.

Aby pokazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ jest rozbieżny wystarczy teraz zauważyć, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

98. Wskazówka: Zauważyć, że $a_n^2 \leqslant a_n$ dla n odpowiednio dużych.

99. Przykładu takiego dostarcza szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

100. Szereg zbieżny warunkowo (por. zad. 96).

101. Zbieżny bezwzględnie.

Wskazówka: Zastosować kryterium całkowe lub „chwyt" z rozwiązania zad. 85.

102. Zbieżny warunkowo.

103. Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1]^n \cdot \frac{1}{n+2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{2n-1+2^{2n-1}}.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że wyrazy szeregu dążą do -1. Zatem szereg jest rozbieżny.

104. Szereg rozbieżny, ponieważ nie spełnia warunku koniecznego.

Wskazówka: Skorzystać z zad. 44, rozdz. VI.

105. Mamy następujące oszacowanie:

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| = \frac{|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Stąd wynika, że rozważany szereg jest zbieżny bezwzględnie.

106. Załóżmy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, więc z warunku koniecznego zbieżności wynika, że istnieje $M > 0$ takie, że $|b_n| \leqslant M$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Stąd

$$|a_n b_n| \leqslant M\,|a_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Na mocy kryterium porównawczego oznacza to, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

107. Rozważany szereg można przekształcić następująco:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1}.$$

Zatem badany szereg jest rozbieżny.

108. Wskazówka: Skorzystać z nierówności

$$\left|\frac{a_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right), \; n \in \mathbb{N}.$$

109. **a)** Załóżmy najpierw, że $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Wtedy istnieje $M > 0$, takie, że $u_n \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\frac{u_n}{1+M} \leqslant \frac{u_n}{1+u_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Pozwala to wywnioskować, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$ jest rozbieżny.

Jeżeli teraz założymy, że $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, to wtedy również $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{1+u_n} \neq 0$. Oznacza to rozbieżność naszego szeregu.

b) Szereg może być zarówno zbieżny (np. $u_n = 1$ dla $n = k^2$ i $u_n = 0$ dla $n \neq k^2$), jak i rozbieżny $\left(\text{np. } u_n = \frac{1}{n}\right)$, **c)** zbieżny, **d)** szereg może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny.

110. Posłużymy się następującą wersją twierdzenia Cauchy'ego o zagęszczaniu:

Twierdzenie Cauchy'ego.

Niech wyrazy szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ maleją. Wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny lub rozbieżny równocześnie z szeregiem $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m^k a_{m^k}$, gdzie m jest dowolną liczbą naturalną, $m \geqslant 2$.

Stosując powyższą wersję do badania rozważanego szeregu przyjmijmy, że $m = p^p$. Wtedy badany szereg będzie zachowywał się tak, jak szereg $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{p^k - pk}}$. Ale $\frac{1}{p^{p^k - pk}} < \frac{1}{(p^p)^k}$ $(k = 4, 5, 6, \ldots)$, więc badany szereg jest zbieżny dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$.

111. Oznaczmy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \frac{\ln u_n}{\ln u} = -1-\varrho$, gdzie $\varrho > 0$. Wtedy znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ zachodzi $u_n \leqslant 1/n^{1+\varrho}$. Oznacza to, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Analogicznie udowadnia się drugą część zadania.

113. **a)** Wskazówka: Pokazać, że jeżeli $m < n$, to

$$\frac{a_m}{r_m} + \frac{a_{m+1}}{r_{m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}.$$

Skorzystać również z warunku koniecznego i wystarczającego Cauchy'ego zbieżności szeregu.

b) W s k a z ó w k a: Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest spełniona nierówność

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right).$$

Wykorzystać tę nierówność do pokazania, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2 \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}.$$

114. Rozważmy najpierw pierwszy przypadek, a więc załóżmy, że $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r > 1$ dla n dostatecznie dużych. Stąd

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}.$$

Weźmy teraz dowolną liczbę s taką, że $1 < s < r$. Korzystając z tego, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s$$

widzimy, że dla n odpowiednio dużych będzie

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r.$$

Stąd

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n},$$

co pozwala wyciągnąć wniosek, że

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s.$$

Pisząc powyższą nierówność w postaci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}$$

widzimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ponieważ jest zbieżny szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dla $s > 1$.

Jeżeli teraz założymy, że zachodzi przypadek drugi, tzn.

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1$$

dla n dostatecznie dużych, to stąd mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{n}{n+1}=\frac{1/(n+1)}{1/n}.$$

Wtedy rozbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{n} a_n$ wynika z rozbieżności szeregu harmonicznego.

116. Korzystając z założeń zadania pokazujemy metodą indukcji następujące równości:

$$u_{2k+1}=\frac{5^k}{4^{2k}},$$

$$u_{2(k+1)}=\frac{5^k}{4^{2k+1}}$$

dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$. Stąd mamy

$$u_{2k+1}+u_{2k+2}=\frac{5^{k+1}}{4^{2k+1}}.$$

Oznacza to, że rozważany szereg może być szeregiem geometrycznym, jeżeli odpowiednio pogrupujemy wyrazy o ilorazie $q=\frac{5}{16}<1$, a więc jest zbieżny.

117. Niech $S_0=0$, $S_n=\sum_{m=1}^{n} u_m$, $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Szeregiem, który spełnia warunki zadania, jest szereg o wyrazach

$$v_n=\frac{u_n}{\sqrt{S-S_{n-1}}+\sqrt{S-S_n}}\quad\text{dla } n=1,2,\ldots$$

118. Szeregiem takim będzie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, gdzie

$$v_1=\sqrt{u_1}\ \text{ oraz } v_n=\frac{u_n}{\sqrt{s_{n-1}}+\sqrt{s_n}}\quad\text{dla } n=2,3,\ldots$$

119. Skorzystamy z następującej nierówności

$$(1+a)^x>1+\frac{xa}{1+a},\ x>0,\ a>-1.$$

Podstawiając $x=\varrho$ oraz $a=\frac{u_n}{S_{n-1}}$ oraz biorąc pod uwagę to, że $1+\frac{u_n}{S_{n-1}}=\frac{S_n}{S_{n-1}}$, otrzymujemy

$$\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)^{\varrho}-1>\frac{\varrho u_n}{S_n},\ n=2,3,\ldots$$

Stąd

$$\frac{u_n}{S_n^{1+\varrho}} \leqslant \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\varrho}} - \frac{1}{S_n^{\varrho}}\right), \; n = 2, 3, \ldots$$

W konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^{1+\varrho}} \leqslant \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{S_1^{\varrho}},$$

co oznacza zbieżność rozważanego szeregu.

120. Rozważmy dwa przypadki.
1° $\varrho > 0$. Wtedy należy wykorzystać wynik z zad. 119.
2° $\varrho \leqslant 0$. Wtedy, korzystając z nierówności

$$\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{S_{n+2}} + \ldots + \frac{u_{n+k}}{S_{n+k}} > \frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}}{S_{n+k}} =$$

$$= \frac{S_{n+k}-S_n}{S_{n+k}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}},$$

(przy czym $S_m = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$) oraz z faktu, że $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n+k} = \infty$, otrzymujemy

$$\frac{S_n}{S_{n+k}} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

dla dowolnie zadanego $\varepsilon > 0$ i dla k odpowiednio dużych. Stąd

$$\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{S_{n+2}} + \ldots + \frac{u_{n+k}}{S_{n+k}} > 1.$$

Oznacza to rozbieżność rozważanego szeregu dla $\varrho = 0$. Ale wyżej napisana nierówność będzie również prawdziwa dla $\varrho < 0$. Koniec dowodu.

121. Wskazówka: Skorzystać z wyniku zad. 120.

122. Wskazówka: Zastosować wynik z zad. 120 lub kryterium całkowe.

123. Niech b_n oznacza liczbę powstającą z a_n przez zastąpienie jej wszystkich cyfr zerami (z wyjątkiem pierwszej). Wtedy $b_n \leqslant a_n$, a więc $\frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{b_n}$. Rozważmy dalej zbiór B_k tych liczb n, dla których b_n ma k cyfr. Wtedy

$$\sum_{n\in B_k} \frac{1}{b_n} = 9^{k-1} \sum_{c=1}^{9} \frac{1}{c\cdot 10^{k-1}} = (0{,}9)^{k-1} \sum_{c=1}^{9} \frac{1}{c}.$$

Dalej mamy

$$S_9 = \sum_{c=1}^{9} \frac{1}{c} = 2{,}8289\ldots < 2{,}9.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n\in B_k} \frac{1}{b_n} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} S_9 (0{,}9)^{k-1} = 10 S_9 < 29.$$

124. Korzystamy z nierówności

$$(n!)^{1/n} \geqslant \frac{n+1}{e}$$

(por. zad. 65, rozdz. I). Mamy dalej

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1a_1\, 2a_2 \dots na_n)^{1/n}}{(n!)^{1/n}},$$

co na mocy nierówności o średniej geometrycznej i arytmetycznej (zad. 54, rozdz. I) nie przekracza liczby

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n(n!)^{1/n}}.$$

Stąd, wykorzystując nierówność napisaną na wstępie, mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n(n!)^{1/n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{ka_k}{n(n!)^{1/n}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} ka_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n!)^{1/n}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} ka_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e}{n(n+1)}.$$

Z drugiej strony $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{k}$ (sprawdzić!). Ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leqslant e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

125. Skorzystamy z następującej zależności

$$[2a] = [a] + \left[a+\frac{1}{2}\right]$$

(por. zad. 63, rozdz. III).

Mamy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \dots =$$

$$= \left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right] + \dots =$$

$$= \left([n]-\left[\frac{n}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right) + \dots + \left(\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]\right) + \dots$$

Poczynając od k-tego wyrazu ($k = [\log_2 n]+1$) wszystkie wyrazy ostatniej sumy są równe 0. Zatem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2k}{2^{k+1}}\right] = [n] = n.$$

127. Korzystamy z wyniku zawartego w zad. 114. Mamy:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right].$$

Stosując twierdzenie de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{e}{(1+x)^{1/x}}-1\right]=\frac{1}{2}.$$

Odwołując się do wspomnianego wyżej wyniku wnioskujemy stąd, że nasz szereg jest rozbieżny.

128. Dowód tego twierdzenia jest dość długi. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do [6, t. 2, s. 274–275].

ROZDZIAŁ XVI

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

1. a) Obszar zbieżności $A = (-1, 1]$, funkcja graniczna

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-1, 1), \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

$\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny do f na zbiorze A, ponieważ f nie jest funkcją ciągłą, a f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ są funkcjami ciągłymi.

b) Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}_+$, funkcja graniczna $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ 0 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$ Zbieżność $\{g_n\}$ na zbiorze A nie jest jednostajna.

c) Dla $x = 0$ zachodzi: $\lim\limits_{n \to \infty} h_n(0) = 0$. Weźmy $x \neq 0$. Wtedy $\lim\limits_{n \to \infty} h_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x} \frac{x^2 n^2}{e^{x^2 n^2}}$. Ponieważ $x^2 n^2 \to \infty$ przy $n \to \infty$ oraz $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{a}{e^a} = 0$ (sprawdzić np. za pomocą reguły de l'Hospitala), więc $\lim\limits_{n \to \infty} h_n(x) = 0$. Ostatecznie obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, a funkcja graniczna $h(x) = 0$ dla $x \in A$.

Dalej zauważmy, że funkcje h_n są nieparzyste. Stąd

$$b_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x) - h(x)| = \sup_{x \geqslant 0} h_n(x).$$

Korzystając z metod rachunku różniczkowego znajdziemy, że

$$h'_m(x) = 2n^2 e^{-n^2 x^2}(1 - 2n^2 x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\, n}.$$

Stąd już łatwo mamy $\sup\limits_{x \geqslant 0} h_n(x) = h_n\left(\frac{1}{\sqrt{2} n}\right) = \sqrt{2} n e^{-1/2}$. Zatem

$$b_n = \sqrt{2} n e^{-1/2} \to \infty$$

skąd wynika, że $\{h_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny na zbiorze $\mathbb{R}$.

2. Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ \pi/2 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Zbieżność $\{f_n\}$ do f na zbiorze A nie jest jednostajna.

Ustalmy dalej $a > 0$ i oznaczmy $A_a = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. Mamy:

$$b_n = \sup_{x \in A_a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geqslant a} \left| \operatorname{arc\,tg} nx - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} na.$$

Stąd $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$, zatem $f_n \underset{A_a}{\rightrightarrows} f$.

Czytelnik uzupełni brakujące szczegóły w powyższym dowodzie.

3. Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}_+$, funkcja graniczna $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ 0 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$
Sprawdzamy łatwo, że $b_n = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Stąd wynika, że $f_n \underset{A_a}{\not\rightrightarrows} f$.

4. Zadanie to pozostawiamy Czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania.

5. Obszar zbieżności $A = (-1, \infty)$, funkcja graniczna

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-1, 1), \\ 1/2 & \text{dla } x = 1, \\ 0 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Zbieżność $\{f_n\}$ do f na zbiorze A jest tylko punktowa.

6. Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f(x) = |x|$. Ponieważ

$$b_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geqslant 0} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right) \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}}$$

(dlaczego?), więc $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

7. a) Pozostawiamy całkowicie Czytelnikowi.

b) Obszar zbieżności $A = [0, 1]$, funkcja graniczna $g = 0$. Mamy też
$b_n = \sup\limits_{x \in A} |g_n(x) - g(x)| = \dfrac{n}{n+1} \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^n \to \dfrac{1}{e}$, skąd $g_n \underset{A}{\not\rightrightarrows} g$.

8. Pozostawiamy Czytelnikowi.

9. Obszar zbieżności $A = (0, 1]$, funkcja graniczna $f = 0$. Można sprawdzić (używając metod rachunku różniczkowego), że $\sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \dfrac{1}{4}$. Stąd (dlaczego?) $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorach B i D, a nie jest jednostajnie zbieżny na A i C.

10. Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f(x) = x$. Biorąc ciąg $x_n = 2\pi n$ widzimy, że $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 2\pi n$, zatem $\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny na zbiorze $\mathbb{R}$.

Z drugiej strony $\sup\limits_{x\in[-a,a]} |f_n(x)-f(x)| = a-n\sin\frac{a}{n}$, gdzie a jest dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Zatem $b_n = \sup\limits_{x\in[-a,a]} |f_n(x)-f(x)| = a-n\sin\frac{a}{n} \to 0$ przy $n\to\infty$. Zatem $\{f_n\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny na zbiorze $\mathbb{R}$.

11. Rozwiązanie tego zadania pozostawiamy Czytelnikowi.

12. Mamy, że $\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ dla $x\in[0,\infty)$ i dla $n=1,2,\ldots$ Ponieważ szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ jest zbieżny, więc na podstawie kryterium Weierstrassa nasz szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny na zbiorze $[0,\infty)$.

13. Ustalmy dowolnie $x \geqslant a$. Wtedy

$$\frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \leqslant \frac{nx}{nx^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \leqslant \frac{1}{a^{n-1}}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ i zbieżność jednostajna naszego szeregu funkcyjnego na przedziale $[a,\infty)$ wynika z kryterium Weierstrassa.

15. Wskazówka: Skorzystać z kryterium Weierstrassa.

16. a) Pozostawiamy Czytelnikowi.

b) Mamy $\left|\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^2}} \leqslant \dfrac{1}{n^{4/3}}$ dla $x\in\mathbb{R}$ i dla $n=1,2,\ldots$ Ze zbieżności szeregu liczbowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{4/3}}$ i z kryterium Weierstrassa wynika zbieżność jednostajna rozważanego szeregu funkcyjnego na zbiorze $\mathbb{R}$.

17. Ciągłość funkcji f na $\mathbb{R}$ wynika z tego, że wyrazy szeregu funkcyjnego są funkcjami ciągłymi na $\mathbb{R}$ oraz szereg ten jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.

Całkę $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ obliczamy jako granicę $\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_0^a f(x)\,dx$. Aby obliczyć $\int\limits_0^a f(x)\,dx$ wystarczy scałkować nasz szereg funkcyjny wyraz po wyrazie na przedziale $[0,a]$. Otrzymamy wtedy, że $\displaystyle\int\limits_0^a f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{n^2}$. Korzystając z tego, że uzyskany szereg funkcyjny (zmiennej a) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,\infty)$ oraz $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a}{n^2} = \dfrac{\pi}{2n^2}$, a następnie powołując się na twierdzenie o przechodzeniu do granicy wyraz za wyrazem, wnioskujemy, że $\displaystyle\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Stąd otrzymujemy (por. zad. 30), że $\displaystyle\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \frac{\pi^3}{12}$.

18. Stosując twierdzenie d'Alemberta-Cauchy'ego-Hadamarda mamy:

a) $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$, **b)** $(-10, 10)$,

c) zbieżny tylko w punkcie $x = 0$, **d)** $\mathbb{R}$,

e) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, **f)** $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$,

g) $(-1, 1)$, **h)** $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

Czytelnik sprawdzi, jak jest na końcach przedziałów zbieżności.

19. Dla $x = 0$ szereg jest oczywiście zbieżny. Ustalmy teraz $x \neq 0$. Wtedy stosując do szeregu liczbowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$ kryterium d'Alemberta mamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2\, x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2\, x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)\,(2n+2)} x^2 = \frac{x^2}{4}.$$

Stąd szereg ten jest zbieżny jeżeli $x \in (-2, 2)$.

Można sprawdzić (co nie jest rzeczą prostą), że jest on rozbieżny w punktach $x = -2$ oraz $x = 2$.

Wskazówka: Skorzystać z zad. 55, rozdz. VI.

20. Obszar zbieżności jest przedziałem $(-1, 1)$, funkcja graniczna (suma szeregu) wynosi $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Zgodnie ze wskazówką weźmy ciąg $f_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} x^k = x^n + x^{n+1} + \ldots = \frac{x^n}{1-x}$ dla $x \in (-1, 1)$. Mamy

$$b_n = \sup_{x \in (-1,\,1)} |f_n(x)| = \sup_{x \in (-1,\,1)} \frac{|x|^n}{1-x} = \infty.$$

Zatem szereg geometryczny nie jest zbieżny jednostajnie na całym przedziale $(-1, 1)$.

21. a) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (porównać z szeregiem geometrycznym),

b) $\mathbb{R}$,

c) $(-2, 2)$ (zastosować kryterium d'Alemberta),

d) $\mathbb{R}$,

e) $[0, \infty)$ (skorzystać z kryterium d'Alemberta).

22. a) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$, **b)** $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n} \sin\frac{\pi n}{4} \cdot \frac{x^n}{n!}$,

c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$, **d)** $f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \dots$

e) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$, **f)** $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1} \cdot (2n-1)!}$,

g) Wskazówka: Skorzystać ze wzoru $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

23. $\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$.

24. $\sqrt{x^3} = 1 + \frac{3}{2}\left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-5)}{2^{n-1}} \frac{(x-1)^n}{n!}\right]$.

25. $g(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{x-3}{9} + \frac{(x-3)^2}{27} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} + \dots$

Wskazówka: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x-3}{3}}$.

26. Zapiszmy

$$\frac{1}{x^2+4x+7} = \frac{1}{3+(x+2)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Stąd

$$\frac{1}{x^2+4x+7} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}.$$

27. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$.

28. Po podstawieniu w rozwinięciu z zad. 27 $x = \pi$, otrzymujemy żądany wzór.

29. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$.

30. Po podstawieniu w rozwinięciu z zad. 29 $x = 0$, otrzymujemy

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Oznaczmy dalej $s = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ Wtedy, korzystając z wyżej otrzymanej równości, mamy

$$\frac{3}{4}s = s - \frac{1}{4}s = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Stąd $s = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$.

31. a) $f(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^2-1}\cos 2x + \frac{1}{4^2-1}\cos 4x + \frac{1}{6^2-1}\cos 6x + \cdots\right)$,

b) $h(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^n\frac{\sin nx}{n}\right]$.

32. $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ do funkcji $f(x) = x$.

33. Obszar zbieżności $A = [0, \infty)$, funkcja graniczna $f(x) = 0$ oraz $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$ (sprawdzić!).

34. a) Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f \equiv 0$ oraz $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

b) Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f \equiv 0$ oraz $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

c) Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f \equiv 0$. Ciąg $\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny do f na zbiorze $\mathbb{R}$. Rzeczywiście, mamy:

$$b_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geqslant 0} \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

(tutaj wykorzystujemy nieparzystość funkcji f_n). Teraz, za pomocą rachunku różniczkowego łatwo się przekonać, że

$$b_n = f_n(n) = \frac{1}{2},$$

dla $n = 1, 2, \ldots$

d) Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f(x) = x$. Kwestię rozstrzygnięcia charakteru zbieżności ciągu $\{f_n\}$ pozostawiamy jako ćwiczenie.

e) Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f \equiv 0$.
Czytelnik sprawdzi, czy ciąg $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze $\mathbb{R}$.

35. Zadanie to pozostawiamy Czytelnikowi (por. rozwiązanie zad. 34).

36. Zauważmy najpierw, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo na zbiorze $\mathbb{R}$ do funkcji $f \equiv 0$.

Dalej, wykorzystując nieparzystość funkcji f_n oraz metody rachunku różniczkowego możemy pokazać, że

$$b_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geqslant 0} \frac{nx}{n^3 + x^2} = f_n(n\sqrt{n}) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ Stąd $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

37. Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f(x) = x^2$. Resztę pozostawiamy Czytelnikowi.

38. Jeżeli $x \in [-1, 1]$, to $1+x^{2n} \leqslant 2$, więc $f_n(x) \leqslant \sqrt[n]{2}$. Z drugiej strony $f_n(x) \geqslant 1$, zatem na podstawie twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ dla $|x| \leqslant 1$.

Jeżeli $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, to $x^2 > 1$. Z nierówności $1+x^{2n} \leqslant x^{2n}+x^{2n} = 2x^{2n}$ otrzymujemy

$$x^2 \leqslant f_n(x) \leqslant x^2 \sqrt[n]{2}.$$

Zatem $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$ dla $|x| > 1$. Ostatecznie mamy, że obszarem zbieżności ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ jest zbiór $\mathbb{R}$, a funkcja graniczna $f(x)$ ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in [-1, 1], \\ x^2 & \text{dla} \quad x \text{ pozostałych.} \end{cases}$$

Dalej zauważmy, że dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1| \leqslant \sqrt[n]{2} - 1,$$

skąd wynika, że $f_n \underset{[-1,1]}{\rightrightarrows} f$.

Załóżmy teraz, że $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, a więc $x^2 > 1$. Wtedy, wykorzystując nierówność $\sqrt[n]{1+x^{2n}} \leqslant x^2 + \frac{1}{n}$ (sprawdzić, że tak jest, szacując rozwinięcie $\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n$ od dołu) mamy:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 \leqslant x^2 + \frac{1}{n} - x^2 = \frac{1}{n}.$$

Stąd widać, że $f_n \rightrightarrows f$ na zbiorze $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Ostatecznie $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

39. Rozwiązanie tego zadania pozostawiamy Czytelnikowi (por. rozwiązanie poprzedniego zadania).

40. Obszarem zbieżności jest $\mathbb{R}_+$, a funkcja graniczna f ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in [0, 1], \\ x & \text{dla} \quad x \in (1, 2], \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \quad x > 2. \end{cases}$$

Czytelnik sprawdzi, czy $f_n \underset{\mathbb{R}_+}{\rightrightarrows} f$ (por. rozwiązanie zad. 38).

41. W s k a z ó w k a: Skorzystać z nierówności $[nx] \leqslant nx < [nx]+1$ (por. zad. 11, rozdz. III). Stąd łatwo otrzymujemy, że $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$, gdzie $f(x) = x$.

42. Można pokazać (por. zad. 5 i 37), że funkcja graniczna f ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ ma postać

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \in (-1, 1), \\ \dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x = 1, \\ 0 & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

Czytelnik dokończy zadanie sam.

43. Funkcja graniczna ciągu $\{f_n\}$ ma postać: $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}_+$ (radzimy sporządzić wykres funkcji f_n). Ciąg $\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}_+$, bowiem $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$.

Czytelnik sprawdzi również, że nie zachodzi równość z punktu c, co jest spowodowane brakiem zbieżności jednostajnej.

45. Mamy, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \frac{\frac{2^n}{n!} \cdot x^2 + x + \frac{2^n}{n!}}{1+x^2}.$$

Stąd i z zad. 15, rozdz. VI otrzymujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{1+x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Z drugiej strony

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2^n}{n!}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

46. Równość z zadania nie jest, jak łatwo sprawdzić, spełniona. Jest to spowodowane tym, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f, $f \equiv 0$ na $\mathbb{R}_+$, ale nie jest zbieżny jednostajnie.

47. Zbieżność jednostajna naszego szeregu funkcyjnego na przedziale $[0, 1]$ jest konsekwencją nierówności

$$|f_n(x) = f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

dla $x \in [0, 1]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ (sprawdzić metodami rachunku różniczkowego) oraz kryterium Weierstrassa.

48. Niech $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ dla $x \in [0, 1]$. Łatwo sprawdzić, że $f(1) = 0$ oraz $f(x) = x$ dla $x \in [0, 1)$. Ponieważ funkcja graniczna nie jest ciągła na przedziale $[0, 1]$, więc szereg ten nie jest na tym przedziale zbieżny jednostajnie.

49. a) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

W s k a z ó w k a: Skorzystać z kryterium d'Alemberta.

b) $(-27, 27)$ na podstawie kryterium d'Alemberta-Hadamarda.

50. Korzystając z rachunku różniczkowego otrzymamy, że

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $x \in \mathbb{R}$ (sprawdzić!). Kryterium Weierstrassa kończy resztę.

51. $(-\sqrt{e}, \sqrt{e})$.

Wskazówka: Skorzystać z kryterium d'Alemberta dla szeregów liczbowych.

52. a) Promień zbieżności $r = \frac{1}{2}$, przedział zbieżności $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Dla obliczenia sumy szeregu oznaczmy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}$ oraz $g(x) = xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n+1}$ dla $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego, mamy:
$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$ dla $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Stąd $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-2x)$, więc $f(x) = -\frac{1}{2x}\ln(1-2x)$ dla $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ oraz $f(0) = 1$.

b) i **c)** pozostawiamy całkowicie Czytelnikowi.

d) Wykorzystując kryterium d'Alemberta ustalamy, że $r = \frac{1}{3}$ oraz przedział zbieżności wynosi $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Dalej, korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego, otrzymujemy:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}x^{2n}}{n4^n}\right)' = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}\cdot x^{2n-1}}{4^n} = \frac{6}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x^2}{4}\right)^n = \frac{6}{x}\cdot\frac{\frac{3}{4}x^2}{1-\frac{3}{4}x^2}.$$

Czytelnik dokończy resztę.

e) Promień zbieżności $r = \sqrt{6}$, przedział $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$. Dalej oznaczmy $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} x^{2n}$, $x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$. Całkując ten szereg wyraz po wyrazie, otrzymamy

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n+1}}{6^n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n-1}}{6^n} = x^2 \cdot g(x).$$

Dalej, całkując wyraz po wyrazie szereg $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n-1}}{6^n}$, otrzymujemy

$$\int g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x^{2n}}{2n\cdot 6^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{6^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{6}\right)^n = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{6-x^2}.$$

Stąd, po wykonaniu potrzebnych obliczeń, znajdziemy $f(x)$.

53. a) Różniczkując ten szereg w przedziale zbieżności $(-1, 1)$, otrzymujemy

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = 1 + x^4 + x^8 + \cdots = \frac{1}{1-x^4}.$$

Stąd $f(x) = \int \frac{dx}{1-x^4}$. Czytelnik zechce obliczyć tę całkę.

b) Pozostawiamy Czytelnikowi.

54. Obszarem zbieżności szeregu jest zbiór $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Rzeczywiście dla $x > 1$ lub $x < -1$ mamy:

$$|x^n + 1| > |x^n| - 1 = |x|^n - 1 > |x|^n - \frac{|x|^n}{2} = \frac{1}{2}|x|^n$$

dla n odpowiednio dużych. Stąd:

$$\frac{1}{|1+x^n|} < \frac{2}{|x|^n} = 2\left|\frac{1}{x}\right|^n.$$

Ponieważ szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{x}\right|^n$ jest zbieżny, więc na podstawie kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ jest zbieżny (i to nawet bezwzględnie) na zbiorze $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Dla $x \in (-1, 1]$ widzimy, że szereg nasz jest rozbieżny, ponieważ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. Dla $x = -1$ szereg nie jest określony.

55. To, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2}$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $[-1+a, 1-a]$ jest prostą konsekwencją dobrze znanych faktów. Ponadto, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2} = \frac{x^2}{1-x^4}$ dla $x \in (-1, 1)$. Całkując teraz wyraz po wyrazie, otrzymujemy

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \cdots = \int \frac{x^2}{1-x^4} dx.$$

Czytelnik dokończy rachunki.

56. Z kryterium Cauchy'ego-Hadamarda wynika, że przedziałem zbieżności rozważanego szeregu potęgowego jest przedział $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Zatem funkcja f jest ciągła w tym przedziale. Teraz, całkując wyraz po wyrazie otrzymujemy

$$\int_0^{0,125} f(x)\,dx = [x+3x^2+\ldots+3^{n-1}x^n+\ldots]_0^{1/8} = \left[\frac{x}{1-3x}\right]_0^{1/8} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{3}{8}} = \frac{1}{5}.$$

57. Rozważmy szereg $1-x^3+x^6+\ldots+x^{3n-3}(-1)^{n+1}+\ldots = f(x)$. Szereg ten jest zbieżny w przedziale $(-1, 1)$. Stąd $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Zatem, całkując wyraz po wyrazie, otrzymujemy

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}x^{3n-3}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{3n-3}\,dx =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Obliczenie sumy drugiego szeregu pozostawiamy Czytelnikowi.

58. Wprawa nabyta w rozwiązywaniu zad. 57 z pewnością umożliwi Czytelnikowi samodzielne obliczenie sumy podanego szeregu liczbowego.

59. Zauważmy najpierw, że $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3}$. Stąd

$$\int f(x)\,dx = -\int \frac{1}{(1-x)^2}dx + 2\int \frac{dx}{(1-x)^3} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} =$$
$$= -(1+x+x^2+x^3+\ldots)+g(x),$$

gdzie $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Ale

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$$

Stąd

$$g(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

Zatem

$$\int f(x)\,dx = (-1-x-x^2-x^3-\ldots)+(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots) =$$
$$= x+2x^2+3x^3+4x^4\ldots$$

Stąd

$$f(x) = 1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots$$

Teraz, po podstawieniu $x = \frac{1}{2}$, otrzymamy

$$12 = 1+\frac{4}{2}+\frac{9}{2^2}+\cdots+\frac{n^2}{2^{n-1}}+\cdots$$

60. Oprzeć się na rozwinięciu w szereg Maclaurina funkcji dwumianowej $(1+x)^\alpha$.

61. a) $f(x) = -(1+x+x^2+\ldots)$.

b) Zauważmy, że $\int f(x)\,dx = \frac{1}{1-x}$, skąd

$$\int f(x)\,dx = 1+x+x^2+x^3+\ldots$$

i dalej

$$f(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^3} = 1-x^3+x^6-x^9+\ldots$

d) Ponieważ $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\ldots$, więc (całkowanie)

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

e) Wskazówka: $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x)-\ln(1-x)$.

f) Wskazówka: Rozłożyć funkcję $f(x)$ na ułamki proste.

g) $f(x) = 1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots$

62. Zadanie to, którego rozwiązanie sprowadza się do obliczania całek, pozostawiamy jako samodzielne ćwiczenie dla Czytelnika.

63. To „groźnie" wyglądające zadanie stanie się proste, jeżeli naszkicujemy wykres funkcji f_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Wtedy stwierdzimy, że obszarem zbieżności ciągu $\{f_n\}$ jest $\mathbb{R}_+$, a funkcja graniczna jest tożsamościowo równa 0 na $\mathbb{R}_+$. Ponadto ciąg $\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}_+$.

Czytelnik uzupełni brakujące szczegóły.

64. Dzieląc licznik i mianownik funkcji f_n przez n^2 otrzymamy:

$$f_n(x) = \frac{x+\frac{x^3}{n^2}+\frac{x}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{(x^4+x)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{x}{x^4+x} = \frac{1}{x^3+1}$$

dla $x \geqslant 1$ oraz przy $n \to \infty$. Z drugiej strony mamy:

$$|f_n(x)-f(x)| = \left| \frac{x+\left(\frac{x^3}{n^2}+\frac{x}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}{(x^4+x)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{x\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{(x^4+x)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \right| = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i dla $x \in [1, \infty)$. Stąd wynika, że $f_n \underset{[1,\infty)}{\rightrightarrows} f$.

Obliczenie całki $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ pozostawiamy Czytelnikowi.

65. Obszar zbieżności $A = \mathbb{R}$, funkcja graniczna $f(x) = x$.

66. Metodą indukcji matematycznej można pokazać (Czytelnik zechce to zrobić), że $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $n = 1, 2, \ldots$ Stąd widać, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem obszarem zbieżności ciągu (f_n) jest zbiór $\mathbb{R}$, a jego funkcją graniczną funkcja $f \equiv 0$.

Teraz zauważmy, że $b_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\geqslant 0} \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (nieparzystość funkcji f_n), $n = 1, 2, \ldots$. Z drugiej strony, obliczając pochodną f'_n i badając jej znak otrzymamy, że $b_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$ przy $n \to \infty$. Zatem $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

67. Rozwiązanie tego zadania pozostawiamy Czytelnikowi.
W s k a z ó w k a: Skorzystać z nierówności

$$-f_{n-1}(1) \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n-1}(1)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

68. Oznaczmy $f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{(1+x^2)^3}+\cdots\right) =$$

$$= x^2\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{dla} \quad x \neq 0.$$

Zatem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Stąd już jest widoczne, że szereg ten nie jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$.

69. W s k a z ó w k a: Skorzystać z kryterium Dirichleta i ze wzoru z zad. 40, rozdz. I.

70. Przy ustalonym $x \in \mathbb{R}$ jest to szereg liczbowy przemienny, którego wyrazy monotonicznie zmierzają do zera.

Dla rozstrzygnięcia, czy szereg ten jest zbieżny jednostajnie, weźmy szereg $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$. Korzystając z kryterium Leibniza mamy

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \right| \leqslant \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Ale $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 0$ przy $n \to \infty$, więc szereg nasz jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$.

71. Ciąg sum częściowych tego szeregu ma postać

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \in [1, n+1], \\ 0 & \text{dla} \quad x > n+1. \end{cases}$$

Stąd widać, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \frac{1}{x}$$

dla $x \geqslant 1$.

Zauważmy teraz, że

$$\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in [1, n), \\ \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \geqslant n. \end{cases}$$

Ponieważ $\sup_{x \geqslant 1} \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) = \frac{1}{n} \to 0$ przy $n \to \infty$, więc stąd wynika, że nasz szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[1, \infty)$.

Z drugiej strony

$$\sup_{x \geqslant 1} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$, a ponieważ szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc jednostajna zbieżność naszego szeregu funkcyjnego nie wynika z kryterium Weierstrassa.

73. Mamy

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{(2+(-1)^n)^n} = \limsup_{n \to \infty} (2+(-1)^n) = 3.$$

Stąd $r = \frac{1}{3}$ jest promieniem zbieżności tego szeregu.

74. W s k a z ó w k a: Wyznaczyć kres górny funkcji $f_n(x) = x^2 e^{-n^2 x}$ na zbiorze $\mathbb{R}_+$ (użyć metod rachunku różniczkowego).

75. Oznaczmy $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$. Z równości $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ otrzymujemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Stąd $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Po zróżniczkowaniu wyraz po wyrazie otrzymujemy dalej, że $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = (xf'(x))' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$. Ostatecznie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

DODATEK

ZASTOSOWANIA W EKONOMII

Pojęcia *kosztu całkowitego*, *utargu* i *zysku*, których będziemy używać w dalszym ciągu, należą do podstawowych pojęć w ekonomii. Będziemy je oznaczać przez K (koszt całkowity), U (utarg) i Z (zysk). Oczywiście każda z tych wielkości jest funkcją ilości x wytworzonego produktu, tzn. $K = K(x)$, $U = U(x)$, $Z = Z(x)$. Są one związane zależnością $Z(x) = U(x) - K(x)$.

W rozważaniach przyjmuje się, że x jest zmienną ciągłą. Wtedy możemy rozważać pochodne $K'(x)$, $U'(x)$, $Z'(x)$. Nazywają się one odpowiednio *kosztem krańcowym*, *utargiem krańcowym* i *zyskiem krańcowym*.

Iloraz $K(x)/x$ oznaczamy przez $k(x)$ i nazywamy *kosztem przeciętnym*.

Jeżeli w czasie x roboczogodzin wytwarza się wyroby o wartości $f = f(x)$, to wielkość $f(x)$ nazywa się *wydajnością pracy*.

Pochodną $f'(x)$ nazywamy *wydajnością krańcową* pracy (na poziomie x).

1. Bierzemy z banku pożyczkę w wysokości 3000 zł na okres 3 miesięcy oprocentowaną w wysokości 36% w stosunku rocznym. Obliczyć sumę, jaką zwrócimy do banku przy założeniu, że procent jest składany co kwartał.

2. Bogaty wuj zdeponował w banku sumę 10000 zł dla swojego bratanka w dniu jego urodzin, przy czym oprocentowanie wynosi 9% w skali roku oraz bank składa procent co jeden miesiąc. Obliczyć, jaką sumą będzie dysponował bratanek z chwilą ukończenia 18 lat.

3. Kwota 1000 zł została złożona w banku na procent składany kwartalnie i uległa podwojeniu po dziesięciu latach. Obliczyć, na jaki procent suma ta została zdeponowana.

4. Wartość produkcji fabryki toreb wynosi $30x - 2x^2 - 2$ zł za x roboczogodzin. Znaleźć wydajność krańcową przy zatrudnieniu 6 robotników.

5. Utarg zakładu naprawy obuwia wynosi $20x - x^2 - 3$ zł za przepracowane x roboczogodzin. Znaleźć wydajność krańcową przy założeniu, że zatrudnionych jest 5 robotników.

6. Fabryka zatrudniająca w pracowników wytwarza narzędzia o wartości $100w+w^2/100-(1/5000)w^4$ zł na dzień. Znaleźć wydajność krańcową, jeśli $w = 20$.

7. Koszt wyprodukowania x kalkulatorów wynosi

$$(30x+0{,}04x^2)/(1+0{,}0003x^3)\text{ zł}$$

dla takich x, dla których $0 \leqslant x \leqslant 100$. Przy sprzedaży x kalkulatorów cena jednego kalkulatora wynosi $100-0{,}05x$ zł. Ile wynosi zysk krańcowy, jeżeli sprzedano x kalkulatorów?

8. W fabryce produkującej buty koszt wyprodukowania x par butów wynosi $(4x+0{,}02x^2)/(1+0{,}002x^3)$ zł. Przy założeniu, że cena jednej pary butów przy sprzedaży x par wynosi $25-0{,}02x$ zł, znaleźć zysk krańcowy, jeżeli wiadomo, że sprzedano x par butów.

9. Zakład wytwarzający pizzę ponosi koszt $(5x+0{,}01x^2)/(1+0{,}001x^3)$ zł za wyprodukowanie x sztuk pizzy. Cenę pizzy ustala się zgodnie z regułą: cena $= 7-0{,}05x$, jeżeli wyprodukowano x sztuk pizzy. Wyznaczyć zysk krańcowy przy założeniu, że sprzedano wszystkie x sztuk pizzy.

10. Koszt całkowity K wyprodukowania x puszek rozpuszczalnika jest dany wzorem

$$K(x) = 20+5x-0{,}01x^2 \text{ zł.}$$

a) Znaleźć koszt krańcowy przy zakupie 84 puszek rozpuszczalnika.

b) Wyjaśnić powiedzenie: „Im więcej kupujesz, tym taniej to kosztuje”, posługując się pojęciem kosztu krańcowego.

c) Znaleźć wielkość x, dla której nie można już stosować wzoru na $K(x)$.

11. Koszt k oleju napędowego, wyrażony w groszach na kilometr, może być zapisany jako iloczyn $k = s\cdot c$, gdzie s jest szybkością zużycia oleju w litrach na kilometr, natomiast c jest ceną oleju w groszach za litr. Jeżeli s i c zależą od czasu (usterki samochodu, zmiany cen itp.), to także k zależy od czasu. Szybkości zmian są związane oczywistą zależnością

$$\frac{dk}{dt} = s\frac{dc}{dt}+c\frac{ds}{dt}.$$

Zinterpretować każdy składnik po prawej stronie powyższej równości.

12. Cena jajek, w groszach za tuzin, wyraża się wzorem $c = 55/(p-1)^2$, gdzie p jest podażą jajek wyrażoną w jednostkach 10 tys. tuzinów. Załóżmy, że 1 lipca 1995 r. podaż wynosi $p = 2{,}1$ oraz, że maleje ona z prędkością 0,03 na miesiąc. Jak szybko rośnie wtedy cena?

Wskazówka: Zauważyć, że $c = f(p)$, gdzie podaż p jest funkcją czasu tzn. $p = p(t)$. Zatem $c(t) = f\big(p(t)\big)$.

13. Cena książek (określonego tytułu) rośnie z prędkością 2 zł na rok. Ponadto, cena książek rośnie wraz z ich wagą z prędkością 12 zł na kilogram. Jak szybko wzrasta waga książek?

14. Prędkość inflacji w pewnym państwie w 1987 r. wynosiła w przybliżeniu $p(t) = 20[1+(t^2-6t)/500]$ procent na rok, gdzie t oznacza czas mierzony w miesiącach od początku roku. W których miesiącach inflacja malała? Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $p(t)$.

15. Zysk pewnej spółki wynosi $Z(t) = 15000\exp(0{,}3t-0{,}01t^2)$, gdzie t oznacza czas mierzony w latach od 1 stycznia 1980 r. Kiedy zysk spółki będzie największy?

16. 15 km od domu przypominasz sobie, że zostawiłeś otwarty kran z wodą, przy czym koszt wypływającej z niego wody wynosi 30 groszy na godzinę. Koszt jazdy do domu oblicza się według wzoru $18+\frac{3s}{10}$ groszy, przy prędkości s km/h. Z jaką prędkością należy jechać, żeby zminimalizować całkowity koszt przejazdu i wody?

17. Wyznaczyć liczbę jednostek towaru, jaką należy wyprodukować, aby zmaksymalizować zyski, jeżeli funkcje kosztu i utargu są dane wzorami

$$K(x) = 360+80x+0{,}002x^2+0{,}00001x^3$$

$$U(x) = 100x-0{,}0001x^2.$$

18. Cena p jaką uzyskuje się za jednostkę pewnego towaru zależy od wielkości dostawy x tego towaru według wzoru $p = \frac{10+4x}{x(x^2+50)}$. Dla jakiej wielkości dostawy uzyska się największy utarg?

19. W pewnym przedsiębiorstwie wytwarzającym jednorodną produkcję stwierdzono, że między kosztem produkcji K i wielkością produkcji x, $x > 0$, zachodzi zależność

$$K(x) = \frac{1}{3}x^4-144x^2+900x.$$

Wyznaczyć optymalną wielkość produkcji, jeżeli przyjmie się za kryterium optymalności koszt jednostkowy $k(x) = K(x)/x$.

20. Koszt całkowity $K(x)$ wyprodukowania x jednostek pewnego towaru wyraża się wzorem $K(x) = 0{,}01x^3+10x+160$. Jakie powinny być rozmiary produkcji, aby koszt wyprodukowania jednej jednostki tego towaru był jak najmniejszy?

21. W pewnym przedsiębiorstwie funkcja kosztów przeciętnych jest dana wzorem $k(x) = 0{,}1x^2-3x+40+\frac{1}{x}$. Dla jakiej wielkości produkcji koszt krańcowy będzie najmniejszy?

22. W pewnym przedsiębiorstwie koszt całkowity wyprodukowania x ton danego wyrobu wyraża się wzorem $K(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 40x + 1$. Przy sprzedaży wytworzonej produkcji przedsiębiorstwo może uzyskać cenę p zależną od wielkości podaży x według wzoru $p(x) = 88 - 0{,}1x$. Dla jakiej wielkości produkcji zysk przedsiębiorstwa będzie największy?

23. Cena zbytu wyrobu jest równa p zł/jednostkę. Koszt całkowity $K(x)$ jest dany wzorem $K(x) = 0{,}1x^2 + 10x + 40$, gdzie x oznacza ilość jednostek wyrobu. Dla jakiej wielkości produkcji zysk przeciętny na jednostkę wyrobu jest największy?

24. Natężenie d dostaw towaru do magazynu (mierzone ilością ton dostarczonego towaru na jednostkę czasu) jest zmienne w ciągu miesiąca (30 dni) i po t dniach (licząc od początku miesiąca) wyraża się wzorem

$$d(t) = t^4 - 60t^3 + 900t^2.$$

W którym momencie natężenie dostaw było największe? Ile ton towaru dostarczono od tego momentu?

25. Wyznaczyć liczbę x jednostek towaru, jaką należy wyprodukować, żeby osiągnąć maksymalny utarg, jeżeli cena p jednostki towaru przy sprzedaży x jednostek wyraża się wzorem $p(x) = \sqrt{12000 - 2x}$.

26. Właściciel planuje wykonać ogrodzenie ogrodu warzywnego o powierzchni 100 m^2. Ogród powinien mieć kształt prostokąta z jednym bokiem leżącym na granicy posiadłości. Trzy boki ogrodzenia kosztują po 12 zł za metr bieżący, natomiast koszt ogrodzenia na granicy posiadłości wynosi 3 zł za metr bieżący. Jakie powinny być wymiary ogrodu o najmniejszym koszcie ogrodzenia?

27. Parkanem długości 120 m należy ogrodzić przylegający do istniejącego już muru prostokątny teren (mur jest częścią ogrodzenia). Jaka powinna być długość części ogrodzenia równoległej do muru, aby ogrodzenie objęło największy prostokątny obszar?

28. Koszt eksploatacji statku w ciągu godziny pływania wyraża się wzorem empirycznym $K(v) = a + bv^3$, gdzie a i b są stałymi dodatnimi, które powinny być obliczone dla każdego statku osobno, natomiast v jest prędkością statku w km/h. Przy jakiej prędkości statek przepłynie dowolną drogę przy najmniejszych kosztach?

29. Niech dana będzie funkcja $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a, b)$. Zakładamy, że $f(x_0) \neq 0$. Jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{1}{h},$$

to nazywamy ją *tempem wzrostu* funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy przez $T_f(x_0)$.

Pokazać, że

$$T_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

30. Załóżmy, że $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ oraz $f(x_0) \neq 0$. Skończoną granicę (o ile taka istnieje)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{x_0}{h}$$

będziemy nazywać *elastycznością funkcji* f w punkcie x_0 i oznaczać przez $E_f(x_0)$. Udowodnić, że

$$E_f(x_0) = x_0\, T_f(x_0) = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

31. Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $f(x_0) \neq 0 \neq g(x_0)$. Pokazać, że

a) $E_{fg}(x_0) = E_f(x_0) + E_g(x_0)$

b) $E_{f/g} = E_f(x_0) - E_g(x_0)$.

Wskazówka: Skorzystać ze wzorów na pochodną iloczynu i ilorazu dwóch funkcji.

32. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie x_0 oraz $f(x_0) \neq 0$. Załóżmy, że przyrostowi argumentu x o s % licząc od x_0 odpowiada przyrost wartości funkcji f o q %. Pokazać, że zachodzi wtedy przybliżona równość:

$$q \cong sE_f(x_0).$$

33. Przyjmijmy, że popyt p na pewien towar jest odwrotnie proporcjonalny do ceny x tego towaru, tzn. $p = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$ oraz $x > 0$.

a) Wyznaczyć elastyczność popytu.

b) Jak (procentowo) zwiększenie ceny towaru o 1% wpływa na zmianę popytu?

34. Funkcja $g(x) = \sqrt{2x+1}$ opisuje zależność podaży q pewnego towaru od ceny x tego towaru. O ile procent (w przybliżeniu) wzrośnie podaż, jeżeli cena wzrośnie o 1% licząc od $x_0 = 4$?

35. Funkcja popytu $p(x)$ i podaży $q(x)$ pewnego towaru są określone następująco:

$$p(x) = 80 - 3x - \frac{1}{50}x^2,$$

$$q(x) = 50 - \frac{1}{50}x^2$$

dla $x \in (0, 50)$, gdzie x oznacza cenę. Znaleźć cenę równowagi tzn. cenę x_0, przy której $p(x_0) = q(x_0)$ oraz wyznaczyć elastyczność popytu i podaży przy cenie równowagi.

36. Niech $x > 0$ oznacza wielkość produkcji pewnego towaru i niech funkcja kosztów będzie dana wzorem $K(x) = x^3 + 1$. Wyznaczyć elastyczność funkcji kosztów krańcowych.

37. Niech $p > 0$ oznacza cenę jednostki pewnego produktu, x — ilość produktu, którą można sprzedać po tej cenie. Przy założeniu, że $p = p(x) = \frac{1}{x+1}$ znaleźć elastyczność utargu krańcowego.

38. Wyrazić elastyczność funkcji kosztów za pomocą kosztu krańcowego i kosztu przeciętnego.

39. Wyznaczyć związek między elastycznością kosztu całkowitego a elastycznością kosztu przeciętnego.

40. Podaż masła f (w kg) jest funkcją ceny masła x (w zł za kg) i ceny mleka y (w zł za litr). Przypuśćmy, że funkcja ta jest określona wzorem

$$f(x, y) = \alpha\sqrt{x-y} \quad (\alpha = \text{const}).$$

O ile w przybliżeniu zmieni się podaż masła, jeżeli:

a) cena masła (7 zł za kg) wzrośnie o 0,07 zł, natomiast cena mleka pozostanie nie zmieniona,

b) cena masła pozostanie nie zmieniona, a cena mleka (0,3 zł za litr) wzrośnie o 0,01 zł?

41. Przy tej samej zależności podaży masła od ceny masła i mleka jak w zadaniu 40 obliczyć, o ile % należy obniżyć cenę masła (przy utrzymaniu tej samej ceny mleka), jeżeli chcemy zwiększyć podaż masła o 2%.

42. Przypuśćmy, że funkcja produkcji pewnego przedsiębiorstwa za rok 1990 wyraża się tzw. *wzorem Cobba-Douglasa* postaci

$$f = f(x, y) = 1{,}02x^{0{,}57}y^{0{,}43},$$

gdzie f oznacza wartość produkcji przedsiębiorstwa, x — zatrudnienie (mierzone funduszem płac), y — środki trwałe (obliczone wartościowo).

a) Obliczyć elastyczność produkcji względem zatrudnienia oraz względem środków trwałych.

b) Jak zmieni się wartość produkcji, jeżeli zwiększymy zatrudnienie o 3% (przy ustalonym poziomie środków trwałych)?

43. Załóżmy, że do wyprodukowania f jednostek towaru jest wykorzystywanych x jednostek kapitału oraz y jednostek siły roboczej. Funkcja $f = f(x, y)$ jest w ekonomii wyrażona wzorem Cobba-Douglasa

$$f(x, y) = kx^{\alpha}y^{1-\alpha},$$

gdzie k i α są stałymi dodatnimi, przy czym $\alpha < 1$. Niech $f(x,y) = x^{1/5}y^{4/5}$ oraz załóżmy, że każda jednostka kapitału kosztuje K zł, natomiast każda jednostka siły roboczej L zł. Załóżmy dalej, że całkowita wartość kosztów zaangażowanych w produkcję wynosi M zł (tzn. $Kx+Ly = M$). Jaki kapitał oraz siła robocza zmaksymalizuje produkcję?

44. Detale pewnego wyrobu są produkowane z żelaza, aluminium i magnezu. Ilość detali, która może być wyprodukowana z x ton aluminium, y ton żelaza oraz z ton magnezu, wyraża się wzorem $Q(x,y,z) = xyz$. Koszt 1 tony aluminium wynosi 60 zł, żelaza — 40 zł oraz magnezu — 80 zł. Ile ton aluminium, żelaza i magnezu należy zużyć, żeby wyprodukować 1000 detali po możliwie najmniejszych kosztach?

45. Firma używa wełny i bawełny do wyrobu pewnego typu materiału. Ilość materiału wyprodukowana przy użyciu x kg wełny i y kg bawełny wynosi $Q(x,y) = xy-x-y+1$ $(x > 1,\ y > 1)$. Cena wełny wynosi p zł/kg, natomiast cena bawełny wynosi q zł/kg. Firma może wydać B zł na zakup surowców. Jaką ilość wełny i bawełny powinna zakupić firma, żeby wyprodukować jak najwięcej materiału?

46. Rurociąg długości l jest zbudowany z przewodu długości l_1 o średnicy D_1 połączonego z innym przewodem długości l_2 o średnicy D_2. Rurociąg powinien przepompowywać Q litrów na sekundę pod ciśnieniem h. Koszt jest zredukowany do minimum przez minimalizację kosztu $K = l_1(a+bD_1)+l_2(a+bD_2)$ $(a, b$ — stałe) przy warunkach

$$l_1+l_2 = l,$$
$$h = kQ^m\left(\frac{l_1}{D_1^{m_1}}+\frac{l_2}{D_2^{m_2}}\right),$$

gdzie k, m, m_1, m_2 są stałymi. Pokazać, że jeśli koszt jest minimalny, to $D_1 = D_2$.

47. Utarg krańcowy dla przedsiębiorstwa przy poziomie produkcji x wynosi $15-0{,}1x$. Niech $U(x)$ oznacza utarg. Znaleźć $U(100)$, przy założeniu, że $U(0) = 0$.

48. Załóżmy, że utarg krańcowy przedsiębiorstwa na poziomie produkcji x jest dany wzorem: $U'(x) = 30-0{,}02x-0{,}0001x^2$. Znaleźć $U(300)$ przy założeniu, że $U(0) = 0$.

49. a) Znaleźć utarg $U(x)$ ze sprzedaży x jednostek produkcji, jeżeli utarg krańcowy wynosi $36-0{,}01x+0{,}00015x^2$ oraz $U(0) = 0$.

b) Po sprzedaniu pierwszej serii 50 jednostek produkcji sprzedano drugą serię 50 jednostek. Obliczyć jak duży będzie utarg ze sprzedaży tej drugiej serii.

50. Wartość sprzedaży produkcji fabryki odzieży po t dniach od 1 stycznia wynosi $S(t) = 260e^{0{,}1t}$ zł dziennie.

a) Znaleźć wartość sprzedaży po 10 dniach.
b) Po ilu dniach wartość sprzedanej odzieży przekroczy 10 tys. zł?

51. Producent ustalił, że utarg krańcowy jest równy $U'(t) = 1000e^{t/2}$, natomiast koszt krańcowy wynosi $K'(t) = 1000-2t$, gdzie t oznacza ilość dni po 1 stycznia.

a) Przy założeniu, że $U(0) = K(0) = 0$, znaleźć wzory dla $U(t)$ oraz $K(t)$.

b) Znaleźć zysk całkowity po 7 dniach.

52. Załóżmy, że na płaszczyźnie $x0p$ są dane krzywe podaży $p = S(x)$ i popytu $p = D(x)$ oraz, że istnieje dokładnie jeden punkt (a, b), w którym popyt jest równy podaży (p oznacza cenę jednostki w zł, x oznacza ilość jednostek towaru). Całkę $\int_0^a [D(x)-b]\,dx$ będziemy nazywać *nadwyżką konsumpcyjną* lub *stratą konsumpcyjną* w zależności od tego, czy znak tej całki jest dodatni czy ujemny. Podobnie, całkę $\int_0^a [b-S(x)]\,dx$ będziemy nazywać *nadwyżką produkcyjną* (jeżeli znak całki jest dodatni) lub *stratą produkcyjną* (jeżeli znak jest ujemny).

a) Wyjaśnić geometryczne znaczenie nadwyżki konsumpcyjnej, wówczas gdy $D(x) \geqslant b$.

b) Zilustrować geometrycznie pojęcie nadwyżki produkcyjnej, jeżeli $S(x) \leqslant b$.

c) Znaleźć nadwyżkę konsumpcyjną i produkcyjną dla krzywej podaży $p = x^2/8$ i krzywej popytu $p = -\dfrac{x}{4}+1$.

53. Popyt p na pewien towar jest następującą funkcją ceny x tego towaru: $p(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$. Znaleźć średnią wartość popytu, jeśli cena wzrośnie od 4 do 5.

54. Dochód narodowy na przestrzeni ostatnich 5 lat był następującą funkcją czasu: $D(t) = 2+3\sqrt{t}$. Znaleźć średnie tempo wzrostu dochodu narodowego w ostatnim roku.

55. Niech $K(x) = x^2+\sqrt{x}$, gdzie $x > 0$, będzie funkcją kosztów. Wyznaczyć średnią wartość kosztów przeciętnych, jeśli wielkość produkcji wzrośnie od 9 do 16.

56. Zapas z ton pewnego towaru w magazynie zmienia się w ciągu miesiąca (30 dni) i po upływie t dni (licząc od początku miesiąca) wyraża się wzorem $z(t) = 0{,}01t^3+0{,}15t^2-18t+300$. W którym momencie zapas towaru jest najmniejszy? Jaki jest średni zapas w ciągu miesiąca?

57. Funkcja kosztów krańcowych dla pewnej cementowni wyraża się wzorem $K'(x) = \dfrac{1}{20}(x-4)^2$ (w milionach złotych na tysiąc ton cementu). Plan miesięczny zakłada wyprodukowanie $x = 9$ tys. ton cementu. O ile milionów złotych wzrośnie całkowity koszt produkcji, jeśli przekroczy się plan o 1 tys. ton cementu? Znaleźć funkcję kosztów przeciętnych dla tej cementowni przy założeniu, że koszty stałe (niezależnie od wielkości produkcji) są równe 0,1 mln zł.

58. Niech $w(t)$ oznacza wydajność robotnika po t godzinach pracy, mierzoną w jednostkach wytworzonego produktu na godzinę pracy. W danym dziale produkcji dzienna norma dla robotników wynosi 80 jednostek. Obliczyć procent wytworzenia dziennej normy przez robotnika, dla którego funkcja wydajności pracy jest dana wzorem $w(t) = 12+t-\frac{1}{6}t^2$. Czy robotnik ten może pracować w godzinach nadliczbowych? Jak długo? (Zakładamy ośmiogodzinny dzień pracy).

59. Załóżmy, że funkcja kosztów krańcowych jest dana wzorem

$$K'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x+6}},$$

natomiast koszt wyprodukowania dwóch jednostek towaru wynosi 60 zł. Wyznaczyć funkcję kosztów oraz obliczyć koszt wyprodukowania 120 jednostek towaru.

ZASTOSOWANIA W CHEMII, BIOLOGII, FIZJOLOGII I PSYCHOLOGII

60. Szybkość reakcji chemicznej w czasie od $t = 0$ do $t = 10$ sekund jest dana wzorem $s(t) = 2t^3-3t^2+1$. Kiedy szybkość reakcji maleje, a kiedy rośnie? Kiedy jest najmniejsza, a kiedy największa?

61. Model liczby osób biorących udział w głosowaniu w pewnym rejonie jest opisany wzorem $N(t) = 30+12t^2-t$, gdzie t oznacza czas w latach, N jest liczbą ludności w tysiącach.

a) W jakim czasie liczba głosujących wzrasta najszybciej?
b) Wyjaśnić znaczenie punktów $t = 0$ i $t = 8$.

62. Liczba myszy w lesie zmienia się w zależności od liczby x sów zgodnie ze wzorem

$$P = 30+10x^2-x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 10.$$

Sporządzić wykres funkcji P oraz wyznaczyć jej wartość największą i najmniejszą.

63. Organizm ameby utrzymuje zawsze kształt trójkąta prostokątnego, którego pole jest równe 10^{-6} mm^2. Znaleźć szybkość zmian obwodu tego trójkąta w chwili, gdy ameba ma kształt trójkąta równoramiennego i gdy jedna z nibynóżek rośnie z prędkością 10^{-4} m/s.

64. Lekarstwo jest wstrzykiwane do krwi człowieka. Powoduje to wzrost temperatury T ciała człowieka po jednej godzinie. Jeżeli wstrzyknięto x miligramów lekarstwa, to

$$T(x) = \frac{x^2}{8}\left(1 - \frac{x}{16}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 16.$$

a) Szybkość zmian temperatury T względem dawkowania x jest nazywana *wrażliwością ciała na dawkowanie*. Wyznaczyć tę wrażliwość.

b) Znaleźć wielkość dawkowania, przy której wrażliwość jest największa.

65. Stężenie $K(t)$ lekarstwa u pewnego pacjenta w czasie t godzin po wstrzyknięciu lekarstwa jest dane wzorem

$$K(t) = \frac{16t}{(10t+20)^2}.$$

Wyznaczyć maksymalne stężenie oraz czas, po którym zostanie ona osiągnięta.

66. Równanie wyrażające *prawo Webera-Fechnera* rozważane w matematycznej psychologii ma postać $dS/dR = c/R$, gdzie S jest odczuwalnym doznawaniem, natomiast R oznacza siłę bodźca. Prawo to orzeka, że zwiększenie bodźca powoduje tym mniejsze doznanie im większy jest bodziec.

a) Pokazać, że funkcja $S = c\ln(R/R_0)$ spełnia równanie Webera-Fechnera (c oraz R_0 są stałymi).

b) Głośność (mierzona w decybelach) jest wyrażana wzorem $L = 10\log_{10}(I/I_0)$, gdzie I_0 jest najmniejszym słyszalnym natężeniem głosu. Znaleźć wartość stałej c jeżeli wiadomo, że L spełnia równanie Webera-Fechnera.

67. Ciśnienie P w aorcie w fazie rozkurczu może być opisane równaniem różniczkowym $\dfrac{dP}{dt} + \dfrac{C}{W}P = 0$, $P(0) = P_0$. Liczby C oraz W są stałymi dodatnimi.

a) Pokazać, że funkcja $P = P_0 e^{-Ct/W}$ spełnia powyższe równanie.

b) Znaleźć wartość $\ln(P_0/P)$ po 1 sekundzie.

68. Ciśnienie P w aorcie podczas skurczu może być opisane równością

$$P = \left(P_0 + \frac{CAW^2B}{C^2+W^2B^2}\right)e^{-Ct/W} + \frac{CAW}{C^2+W^2B^2}[C\sin Bt + (-WB)\cos Bt].$$

Pokazać, że $P(0) = P_0$ oraz $dP/dt + (C/W)P = AC\sin Bt$.

69. Promień kolonii bakterii wzrasta o 20% na godzinę.

a) Przy założeniu, że kolonia ma kształt koła, obliczyć, jak szybko wzrasta jej pole.

b) Rozwiązać to samo zadanie w przypadku, jeśli założymy teoretycznie, że kolonia ma kształt kwadratu, którego długość boku rośnie o 20% na godzinę.

70. Model ilości ludności uwzględniający urodziny i zgony jest opisany równaniem $dP/dt = P(a-bP)$. Stałe a, b $(a > 0, b \neq 0)$ są tzw. stałymi witalności.

a) Niech $P(0) = P_0$. Sprawdzić, czy funkcja

$$P(t) = a/[b+([a/P_0]-b)e^{-at}]$$

jest rozwiązaniem naszego równania.

b) Pokazać, że jeżeli $t \to \infty$, to liczba ludności $P(t)$ zbliża się do stałej a/b.

71. Niech $P(t)$ oznacza ilość bakterii w pewnej kolonii w chwili t. Załóżmy, że $P(0) = 100$ oraz, że P rośnie z szybkością $20e^{3t}$ bakterii na dzień w czasie t. Ile bakterii będzie w kolonii po 50 dniach?

72. Liczba jednostek $N(t)$ w populacji jest dana wzorem

$$N(t) = N_0 \frac{e^{3t}}{\frac{3}{2}+e^{3t}}.$$

Wyznaczyć $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$ i przedyskutować biologiczne znaczenie tej granicy.

73. Psycholog przeprowadza pewne manipulacje z teorią testów chcąc zastąpić współczynnik niezawodności

$$R = \frac{nr}{1+(n-1)r} \quad (\textit{wzór Spearmana-Browna})$$

przez liczbę 1 zgodnie z czyjąś sugestią, że tak powinno być dla „bardzo dużych" n. Dokonuje tego w ten sposób, że formalnie zastępuje n przez $\frac{1}{x}$, upraszcza, a następnie podstawia $x = 0$ i otrzymuje 1. Wyjaśnić postępowanie psychologa na podstawie pojęć teorii granic.

74. Załóżmy, że jest dana mieszanina N_p cząstek prawoskrętnego kwasu winowego i N_l cząstek lewoskrętnego kwasu winowego (kwasy te mają te same właściwości chemiczne, natomiast różnica polega na asymetrycznej zdolności do skręcania płaszczyzny polaryzacji światła). Można pokazać, że entropia takiej mieszaniny wyraża się wzorem

$$S = k\left(N_p \ln\frac{N}{N_p} + N_l \ln\frac{N}{N_l}\right),$$

gdzie k oznacza stałą Boltzmanna, natomiast $N = N_p + N_l$. Przy założeniu, że liczba N jest ustalona, obliczyć, w jakiej proporcji należy utworzyć mieszaninę tych kwasów, aby miała ona maksymalną entropię.

75. Stężenie pewnej substancji we krwi w chwili t wyraża się wzorem

$$C(t) = \frac{Dp}{q-p}(e^{-pt} - e^{-qt}),$$

gdzie D, p, q są stałymi dodatnimi charakteryzującymi tę substancję. W jakim czasie stężenie substancji osiąga maksymalną wartość?

76. Zależność ilości substancji biorącej udział w reakcji chemicznej pierwszego rzędu od czasu tej reakcji wyraża się wzorem

$$x(t) = a(1 - e^{-kt})$$

dla pewnych stałych a i k. Wyznaczyć średnią szybkość reakcji w czasie od $t = 0$ do $t = T$.

77. Przerwanie kanału ściekowego stało się przyczyną skażenia jeziora w pobliżu miasta. Szybkość zmiany stężenia bakterii $C(t)$ (czyli liczby bakterii w cm^3 w czasie jednej godziny) po t dniach jest dana wzorem $C'(t) = 1000(t-7)$, $0 \leqslant t \leqslant 6$.

a) Inspektor sanitarny otrzymał zadanie wykonywania pomiarów zanieczyszczenia wody jeziora, które podlega procesowi samooczyszczania aż do osiągnięcia połowy stężenia wyjściowego $C(0)$. W którym dniu inspektor zakończy pracę, jeżeli wiadomo, że $C(0) = 40000$?

b) Jaka jest całkowita zmiana stężenia od czwartego do szóstego dnia?

78. Przebieg reakcji chemicznej można opisać następującym równaniem:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{du}{(80-u)(60-u)} = kt, \quad k = \text{const}.$$

W równaniu tym $x = x(t)$ oznacza ilość kilogramów produktu reakcji po t minutach oraz $x_0 = x(0)$. Zakładamy, że w reakcji biorą udział dwie substancje w ilości 80 kg i 60 kg.

a) Przy założeniu, że $x = 0$ dla $t = 0$ wyznaczyć zależność $x = x(t)$.

b) Ile produktu reakcji powstanie po 15 minutach, jeżeli $x = 20$ dla $t = 10$.

79. Pearson i Lee badali dziedziczenie wybranych cech fizycznych w rodzinach w 1903 roku. W wyniku tych badań ustalili, że

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\tau-\mu)/\sigma} e^{-x^2/2} dx,$$

gdzie P oznacza prawdopodobieństwo tego, że wzrost matki nie przekroczy τ cali (1 cal = 2,5 cm). Przybliżone wartości μ i σ wynoszą: $\mu = 62{,}484$ cala, $\sigma^2 = 5{,}714 \text{ cal}^2$.

Jaka przeciętna liczba matek na 100 nie będzie miała wzrostu większego niż 63 cale?

80. Pewna substancja jest wydalana z organizmu dwiema niezależnymi drogami (np. z moczem, z wydychanym powietrzem). Szybkości wydalania substancji tymi drogami wyrażają się odpowiednio wzorami

$$v_1(t) = \alpha A e^{-(\alpha+\beta)t},$$
$$v_2(t) = \beta A e^{-(\alpha+\beta)t},$$

gdzie α, β oraz A są pewnymi stałymi dodatnimi. Znaleźć ilość substancji wydalanej z organizmu tymi dwiema drogami oraz wyznaczyć ich wzajemny stosunek.

ZASTOSOWANIA W FIZYCE

81. Niech $Q(t)$ oznacza ilość ciepła potrzebną do ogrzania ciała (o masie jednostkowej) od temperatury 0 do temperatury t. Posługując się pojęciem pochodnej podać definicję ciepła właściwego ciała.

82. Dziecko nadmuchuje balon w kształcie kuli. W pewnej chwili prędkość wzrostu objętości balonu wynosi 50 cm^3 na sekundę. W tej samej chwili balon ma promień 10 cm. Jak szybko zmienia się wtedy promień balonu?

83. Balon jest wypuszczany z ziemi w odległości 10 m od podstawy latarni mającej wysokość 30 m. Balon wznosi się z prędkością 2 m/s. Jak szybko porusza się po ziemi cień balonu po 4 sekundach?

84. Ciśnienie atmosferyczne p na wysokości x metrów nad poziomem morza jest równe w przybliżeniu $p = 2116e^{-0{,}00000954x}$. Obliczyć prędkość spadku ciśnienia na zewnątrz balonu znajdującego się na wysokości 600 m i wznoszącego się z prędkością 3 m/s.

85. Natężenie prądu w obwodzie RLC jest dane wzorem

$$I(t) = \left(\frac{1}{3}\sin t + \cos t\right)e^{-t/2} + 4.$$

Liczba $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$ jest natężeniem po długim czasie. Znaleźć to natężenie.

86. Temperatura $T(x,t)$ w chwili t w punkcie pręta o współrzędnej x, $x \in [0, l]$ jest dana wzorem

$$T(x,t) = B_1 e^{-\alpha t}\sin\lambda_1 x + B_2 e^{-\beta t}\sin\lambda_2 x + B_3 e^{-\gamma t}\sin\lambda_3 x,$$

gdzie α, β, γ, λ_1, λ_2, λ_3, B_1, B_2, B_3 są stałymi dodatnimi. Pokazać, że $\lim\limits_{t\to\infty} T(x,t) = 0$ dla każdego punktu x.

87. Owad płynie po powierzchni fali. Załóżmy, że ruch fali jest opisany funkcją $z = f(t, y) = e^{-y}\cos t + \sin(y+t^2)$. W chwili $t = 2$ owad ma pozycję $y = 3$, natomiast pozioma składowa prędkości fali dy/dt jest równa 5. Ile wynosi pionowa składowa prędkości dz/dt w tym momencie?

88. Ciało stałe o temperaturze T wysyła promieniowanie złożone z fal o różnych długościach λ i natężeniu $I = I(\lambda)$ danym wzorem

$$I(\lambda) = \frac{c}{\lambda^5} e^{-k/\lambda T},$$

gdzie c i k są pewnymi stałymi. Wyznaczyć takie λ, aby $I(\lambda)$ było największe.

89. Bieguny ogniwa o sile elektromotorycznej E i oporze wewnętrznym r połączono drutem o oporze x. Jaki musi być opór x, aby ilość ciepła Q wydzielanego przez drut w jednostce czasu była największa?

Wskazówka: Skorzystać z prawa Joule'a.

90. Promień świetlny wychodzący z punktu A z prędkością v_1, pada na prostą p pod kątem β i dalej biegnie z prędkością v_2 do punktu B po drugiej stronie prostej p. Wyznaczyć stosunek $\sin\alpha/\sin\beta$ tak, żeby czas potrzebny na przejście od A do B był najkrótszy.

91. Moc P silnika samolotu lecącego ze stałą prędkością v jest dana wzorem

$$P = \left(cv^2 + \frac{d}{v^2}\right)v,$$

gdzie c i d są stałymi dodatnimi.

a) Wyznaczyć prędkość v, przy której moc ma minimalną wartość.

b) Niech $Q(t)$ oznacza ilość paliwa (w litrach), którą samolot ma w chwili t. Załóżmy, że moc jest proporcjonalna do zużycia paliwa. Przy jakiej prędkości czas lotu będzie najdłuższy?

92. Szybkość tłumienia fal w plazmie jest proporcjonalna do $r^3 e^{-r^2/2}$, gdzie r jest stosunkiem prędkości fal do termicznej prędkości elektronów w plazmie. Znaleźć wielkość r, dla której szybkość tłumienia jest największa.

93. *Prawo Plancka* podaje zależność energii emitowanej przez ciało czarne od długości fali λ i temperatury T:

$$E = \frac{2\pi k^2 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1},$$

gdzie $x = \dfrac{hc}{\lambda k T}$, h oznacza stałą Plancka, k — stałą Boltzmanna, c — prędkość światła. Wykres E względem λ przy ustalonym T nazywa się krzywą Plancka. Maksimum wzdłuż każdej krzywej Plancka otrzymuje się po podstawieniu

$\dfrac{\partial E}{\partial \lambda} = 0$ i znalezieniu $\lambda_{\max}$. Otrzymana zależność nazywa się *prawem przesunięcia Wiena*. Pokazać, że to prawo wyraża się zależnością $\lambda_{\max} = hc/kTx_0$, gdzie x_0 jest dodatnim pierwiastkiem równania $5 - x - 5e^{-x} = 0$. Oszacować liczbę x_0.

94. Gazy rzeczywiste podlegają w przybliżeniu *równaniu van der Waalsa* postaci

$$\left(p + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = RT,$$

gdzie V oznacza objętość, p — ciśnienie, T — temperaturę tego gazu. Ponadto α oraz β i R są pewnymi stałymi. Zbadać zależność ciśnienia p od objętości V przy ustalonej temperaturze.

95. Temperatura (w stopniach Celsjusza) w punkcie (x, y) wyraża się wzorem $T = T(x, y) = -0{,}0003x^2y + 0{,}9307y$, gdzie x i y oznaczają odpowiednio szerokość i długość geograficzną (w stopniach). Z jaką prędkością zmienia się temperatura, jeżeli poruszamy się na północ od punktu P, dla którego $x = 55{,}7^\circ$, $y = 120{,}2^\circ$?

96. Temperaturę potencjalną θ definiuje się za pomocą temperatury T oraz ciśnienia p wzorem

$$\theta = T\left(\frac{1000}{p}\right)^{0{,}286}.$$

Temperaturę oraz ciśnienie możemy uważać jako funkcję położenia punktu (x, y, z) w atmosferze oraz czasu t.

Wyznaczyć $\partial\theta/\partial x$, $\partial\theta/\partial y$, $\partial\theta/\partial z$, $\partial\theta/\partial t$ za pomocą pochodnych cząstkowych funkcji T i p.

97. Równanie różniczkowe cząstkowe $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$, zwane *równaniem Kortewega-de Vriesa*, opisuje ruch fal wodnych w płytkim kanale. Pokazać, że dla każdego c dodatniego funkcja

$$u(x, t) = \frac{3c}{\cosh^2\left[\frac{1}{2}(x - ct)\sqrt{c}\right]}$$

jest rozwiązaniem równania Kortewega-de Vriesa. Rozwiązanie to przedstawia tzw. „wędrujący garb" wodny i nazywa się *solitonem*. Wyjaśnić, jak kształt solitonu zależy od stałej c.

98. Niech będzie dane *równanie Schrödingera* postaci

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -(A^2 + B^2 + C^2)\psi,$$

gdzie

$$A^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_x,\ B^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_y,\ C^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_z,$$

przy czym m oznacza masę cząstki, h — stałą Plancka, natomiast E_x, E_y, E_z oznaczają energię cząstki względem osi $0x$, $0y$ i $0z$.

Przyjmijmy, że rozwiązanie powyższego równania ma postać

$$\psi(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z),$$

gdzie X, Y, Z są funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi. Pokazać, że równanie Schrödingera przyjmuje wtedy postać

$$\left(\frac{X''}{X} + A^2\right) + \left(\frac{Y''}{Y} + B^2\right) + \left(\frac{Z''}{Z} + C^2\right) = 0.$$

99. Potencjał V dwóch równoległych nieskończonych przewodników z ładunkiem o liniowych gęstościach λ i $-\lambda$ jest równy $V = (\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln(r_2/r_1)$, gdzie $r_1^2 = (x-x_0)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x+x_0)^2 + y^2$. Zakładamy, że przewodniki te są równoległe do osi $0z$ oraz przecinają płaszczyznę $x0y$ w punktach $(-x_0, 0)$, $(x_0, 0)$.

a) Znaleźć gradient funkcji V.

b) Sprawdzić, czy $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$.

100. W termodynamice jest wykorzystywana zależność

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial z} = -1,$$

gdzie $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$, $z = h(x, y)$ są funkcjami zdefiniowanymi w sposób uwikłany za pomocą równania $F(x, y, z) = 0$.

Zakładamy tutaj, że F spełnia założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej. Udowodnić podaną zależność i wyjaśnić jej znaczenie.

101. Objętość V, ciśnienie p oraz temperatura T gazu są związane równaniem van der Waalsa postaci

$$p = \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2},$$

gdzie α, β są stałymi (por. zad. 94).

a) Wyznaczyć V, p oraz T jako funkcje dwóch pozostałych zmiennych.

b) Znaleźć $\dfrac{\partial T}{Tp}$, $\dfrac{\partial p}{\partial V}$, $\dfrac{\partial V}{\partial T}$ i pokazać, że iloczyn tych trzech pochodnych cząstkowych jest równy -1.

Uwaga. Por. zad. 100.

102. *Równanie Dietericiego* stanu gazu ma postać

$$p(V-b)e^{a/RTV} = RT,$$

gdzie a, b, R są stałymi, natomiast p, V, T oznaczają odpowiednio ciśnienie, objętość i temperaturę gazu. Traktując V jako funkcję zmiennych T i p pokazać, że

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{\alpha}{TV}\right)\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{\alpha}{V^2}\right)^{-1}.$$

103. W teorii równań różniczkowych cząstkowych fizyki matematycznej ważną rolę odgrywa pojęcie *nawiasu Poissona.* Przypomnijmy, że jeżeli $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $g = g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ są zadanymi funkcjami mającymi pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych, to nawias Poissona (f, g) funkcji f i g określamy następująco:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i}\right).$$

Udowodnić następujące własności nawiasów Poissona:

1° $(f, g) = -(g, f)$

2° $(f, f) = 0$

3° $(af, bf) = ab(f, g)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$

4° $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$

5° $(fg, h) = f(g, h) + g(f, h)$

6° $(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) = 0.$

Uwaga. Równość z 6° nazywa się *tożsamością Poissona.*

104. Ciepło właściwe ciała w pewnym zakresie temperatury (przy ustalonym ciśnieniu i objętości) wyraża się wzorem

$$C(t) = a + bt + ct^2,$$

gdzie a, b, c są liczbami wyznaczonymi empirycznie. Obliczyć średnie ciepło właściwe w zakresie temperatury od 0 do t (mieszczącym się w zakresie temperatury wyżej wspomnianym).

105. Natężenie prądu i w układzie RLC wyraża się wzorem

$$i = EC\left(\frac{\alpha^2}{\omega} + \omega\right)e^{-\alpha t}\sin \omega t,$$

gdzie E, C, R, L są stałymi, $\alpha = R/2L$, $\omega = (1/2L)(4L/C - R^2)^{1/2}$. Ładunek Q spełnia warunki: $dQ/dt = i$, $Q(0) = 0$. Wyznaczyć $Q = Q(t)$.

106. Natężenie prądu i w układzie RLC wyraża się wzorem

$$i = EC\alpha^2 te^{-\alpha t},$$

gdzie R, L, C są stałymi oraz $\alpha = R/2L$. Wyznaczyć ładunek $Q(t)$, jeżeli wiadomo, że $Q(t) = \int_0^t i\,ds$.

107. Prędkość pociągu zmienia się i po czasie t minut od startu wynosi $v = 100 + e^{-3t}\sin 2\pi t$ kilometrów na godzinę. Jaką odległość przebędzie pociąg w czasie od $t = 1$ do $t = 3$?

108. Naładowana cząstka porusza się pod wpływem pola magnetycznego wzdłuż linii prostej, oscylując tam i z powrotem od pewnego punktu początkowego P z coraz to większą amplitudą.

Niech $S(t)$ będzie odległością cząstki od punktu P. Załóżmy, że $S(t)$ spełnia równanie

$$[S^2(t)]\,S'(t) = t\sin t + \sin^2 t\cos^2 t,$$

a ponadto $S(0) = 0$.

a) Udowodnić, że $[S(t)]^3 = 3\int\limits_0^t (x\sin x + \sin^2 x\cos^2 x)\,dx$.

b) Wyznaczyć wszystkie miejsca zerowe funkcji $S'(t)$ dla $t > 1$. Które z nich odpowiadają największej odległości cząstki od punktu P?

109. *Drugie prawo Keplera* dla ruchu planet orzeka, że odcinek łączący planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych czasach jednakowe pola.

Umieśćmy Słońce w punkcie $(0, 0)$ i wprowadźmy współrzędne biegunowe (r, φ) dla położenia planety. Załóżmy, że moment kątowy planety o masie m względem Słońca jest stały, tzn. $mr^2\varphi' = mk$, gdzie $k = \text{const}$ oraz $\varphi' = d\varphi/dt$. Wyprowadzić drugie prawo Keplera pokazując, że $\int_t^{t+h} r^2\varphi'\,ds$ jest stała dla wszystkich czasów t.

110. Satelita porusza się wokół Ziemi po orbicie eliptycznej. Kąt φ między długą osią a kierunkiem od satelity do środka Ziemi oscyluje między $+\varphi_m$ a $-\varphi_m$. Zakłada się, że $0 < \varphi_m < \pi/2$. Czas T całkowitego cyklu oscylacji wyraża się wzorem

$$T = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_m}}.$$

Wprowadźmy kąt β zgodnie z równością $\sin\varphi = \sin\varphi_m \sin\beta$. Pokazać, że wtedy T można wyrazić całką eliptyczną postaci

$$T = \frac{4}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}},$$

gdzie $k^2 = \sin^2\varphi_m$.

111. Obliczyć pracę, jaką wykonują 2 mole metanu podczas rozprężania izotermicznego w temperaturze 300 K od objętości $1\,\mathrm{dm}^3$ do objętości $10\,\mathrm{dm}^3$.

Zakładamy, że rozważany gaz jest gazem rzeczywistym spełniającym równanie van der Waalsa

$$\left(p+\frac{an^2}{V^2}\right)(V-nb) = nRT,$$

gdzie n oznacza liczbę moli gazu, T — temperaturę, a stałe dla metanu przyjmują odpowiednio wartości $a = 0{,}228\,\mathrm{m}^2/\mathrm{mol}^2$, $b = 4{,}28\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{mol}^2$, $R = 8{,}314$.

112. W mechanice kwantowej liczbę cząstek podlegającą *rozkładowi Bosego-Einsteina* można wyrazić za pomocą wzoru

$$n = \frac{2f}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}}{Ae^x-1}\,dx,$$

gdzie A i f są stałymi rzeczywistymi oraz $A > 1$. Obliczyć wartość n.

113. Całkowita energia *n fermionów*, tzn. cząstek podlegających *statystyce Fermiego-Diraca* wyraża się wzorem

$$E = \frac{2fkT}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{x^{3/2}}{Ae^x+1}\,dx,$$

gdzie A, f, k, T oznaczają stałe rzeczywiste. Obliczyć E.

114. Funkcja $u(x,t)$ określona wzorem

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(s)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-s)2}{4t}}\,ds$$

jest rozwiązaniem *równania przewodnictwa cieplnego*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z warunkiem $u(0,x) = \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną. Pokazać, że jeżeli $|\varphi(s)| \leqslant Me^{a|s|}$, to całka definiująca funkcję $u(x,t)$ jest zbieżna i zachodzi nierówność

$$|u(x,t)| < 2Me^{a^2t}e^{|a|x}.$$

115. Niech będzie dane równanie Schrödingera postaci

$$\frac{d^2\psi}{ds^2}+\left(\frac{2E}{hv}-s^2\right)\psi = 0.$$

Wyznaczyć współczynniki $a_i\,(i = 0,1,\ldots)$, dla których rozwiązanie równania Schrödingera będzie miało postać

$$\psi(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2}\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^{k+i},$$

$(E,h,v$ są stałymi).

ODPOWIEDZI

1. 3270 zł.

2. Korzystamy ze wzoru

$$S = S_0\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^k,$$

gdzie r oznacza procent, n — ilość składników na rok, k — wielokrotność składników mieszcząca się w czasie, na który jest zdeponowana suma początkowa S_0. Po podstawieniu $n = 12$, $k = 216$, $r = 9$, $S_0 = 10000$ otrzymujemy $S \cong 50226$ zł.

3. Na podstawie wzoru podanego w rozwiązaniu zad. 2 otrzymujemy, że suma została zdeponowana na 7%.

4. 6 zł za 1 roboczogodzinę.

5. 10 zł za 1 roboczogodzinę.

6. 94 zł za 1 roboczodzień.

7. Przy sprzedaży x kalkulatorów osiągamy utarg $U(x) = x(100-0{,}05x)$, a więc zysk $Z(x) = U(x)-K(x) = x(100-0{,}05x)-\dfrac{30x+0{,}04x^2}{1+0{,}0003x^3}$. Pochodna $Z'(x)$ jest poszukiwanym zyskiem krańcowym.

8. Zysk krańcowy $Z'(x)$ wyraża się wzorem

$$Z'(x) = 25-0{,}04x-\frac{4+0{,}04x-0{,}016x^3+0{,}00004x^4}{(1+0{,}002x^3)^2}.$$

9. Wskazówka: Por. rozwiązanie zadania 7.

10. a) $K'(84) = 332$ zł.

b) Wynika to stąd, że funkcja $K'(x)$ jest malejąca.

c) $x \geqslant 504$.

11. Pierwszy składnik oznacza szybkość wzrostu kosztów na skutek zmiany cen, natomiast drugi składnik jest szybkością wzrostu kosztów na skutek zmiany szybkości zużycia paliwa.

12. Po skorzystaniu ze wskazówki i z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej otrzymujemy:

$$c'(t) = f'(p)\,p'(t).$$

Ponieważ

$$f'(t) = \frac{-110}{(p-1)^3},$$

więc $c'(2{,}1) = -110/1{,}1^3$.

Po oznaczeniu $t_0 = 1$ lipca 1995 r. mamy $p'(t_0) = -0{,}03$. Zatem

$$c'(t_0) = (-110/1{,}1^3)(-0{,}03) \cong 2{,}479 \text{ grosza na tuzin.}$$

13. Z założenia $dc/dt = 2$ zł/rok oraz $dc/dw = 12$ zł/kg (c oznacza cenę, a w — wagę). Z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej otrzymujemy teraz $dw/dc = 1/(dc/dw) = (1/12)$ kg/zł. Dalej, na podstawie twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dc}\frac{dc}{dt} = \frac{1}{12}\frac{\text{kg}}{\text{zł}}\cdot 2\frac{\text{zł}}{\text{rok}} = \frac{1}{6}\frac{\text{kg}}{\text{rok}}.$$

14. Inflacja maleje w styczniu, lutym i marcu. Osiąga minimum w marcu. Od 1 kwietnia inflacja zaczyna rosnąć.

15. Zauważmy, że

$$Z'(t) = Z(t)(0{,}3 - 0{,}02t).$$

Stąd otrzymujemy, że $t_{\max} = 15$. Oznacza to, że zysk spółki będzie największy na początku 1995 r.

16. Przy prędkości s km/h czas jazdy do domu wynosi $t_1 = 15/s$. Koszt wody, jaka w tym czasie wypłynie z kranu, wynosi

$$K_w(s) = 30t_1 = \frac{450}{s}.$$

Koszt całkowity (koszt wody + koszt przejazdu) wyraża się wzorem

$$K(s) = \frac{450}{s} + 18 + 0{,}3s.$$

Stąd wyznaczamy $s_{\min} = \sqrt{1500}$ km/h $\cong 38{,}7$ km/h.

17. Należy wyprodukować 749 jednostek towaru.

18. Z zależności $U(x) = xp(x)$ otrzymujemy

$$U(x) = \frac{10+4x}{x^2+50}.$$

Stąd

$$U'(x) = \frac{-4(x^2+5x-50)}{(x^2+50)^2}.$$

Teraz stwierdzamy łatwo, że $x_{max} = 5$.

19. Minimalny koszt jednostkowy jest osiągany dla $x = 12$.

20. $x = 20$.

21. Koszt krańcowy będzie najmniejszy dla $x = 10$.

22. Mamy

$$U(x) = xp(x) = 88x - 0{,}1x^2,$$

natomiast

$$Z(x) = U(x) - K(x) = -0{,}0001x^3 + 48x - 1.$$

Stąd wynika, że Z osiąga maksimum dla $x = 400$.

23. Zysk $Z(x)$ wyraża się wzorem

$$Z(x) = U(x) - K(x) = px - 0{,}1x^2 - 10x - 40.$$

Stąd zysk przeciętny $z(x)$ wynosi

$$z(x) = \frac{Z(x)}{x} = p - 0{,}1x - 10 + \frac{40}{x}.$$

Łatwo obliczyć, że z osiąga maksimum dla $x = 20$.

24. $t_{max} = 15$. Do tego momentu dostarczono 50,625 ton towaru.

25. $x_{max} = 4000$.

26. Niech y oznacza długość boku ogrodzenia na granicy posiadłości (oraz boku równoległego), natomiast x — długość pozostałych dwóch boków. Wtedy $xy = 100$ i koszt ogrodzenia K wynosi: $K = 12(2x+y)+3y$. Stąd wyznaczamy $K = K(x) = 24x + \frac{1500}{x}$. A zatem wymiary ogrodu wynoszą: $x_{min} = \sqrt{125/2}$, $y_{min} = \sqrt{160}$.

27. 60 m.

28. Czas przepłynięcia drogi s ze stałą prędkością v wynosi $t = s/v$. Zatem koszt K_1 przepłynięcia drogi s przy prędkości v będzie wynosił

$$K_1(v) = tK(v) = \frac{s}{v}(a+bv^3) = s\left(\frac{a}{v} + bv^2\right).$$

Stąd wynika, że funkcja K_1 osiąga minimum dla $v = \sqrt[3]{a/2b}$.

31. Udowodnimy wzór z punktu **a)**. Korzystając z zad. 30 i wskazówki otrzymujemy

$$E_{fg}(x_0) = x_0 \frac{(fg)'x_0}{f(x_0)g(x_0)} = x_0 \frac{f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)}{f(x_0)g(x_0)} =$$

$$= x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} + x_0 \frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = E_f(x_0)+E_g(x_0).$$

b) Dowód przebiega podobnie.

32. Wskazówka: Skorzystać z definicji elastyczności funkcji.

33. a) Na podstawie zad. 30 mamy:

$$E_p(x) = x\frac{p'(x)}{p(x)} = x\left(-\frac{a}{x^2}\right)\frac{x}{a} = -1.$$

b) Z zależności ustalonej w a) oraz z przybliżonej równości z zad. 32 wynika, że zwiększenie ceny towaru o 1% spowoduje zmniejszenie popytu o około 1%.

34. Na podstawie zależności z zad. 32 łatwo obliczymy, że podaż wzrośnie w przybliżeniu o 4/9%.

35. $x_0 = 10,\ E_p(x_0) = -17/24,\ E_q(x_0) = -1/12.$

36. $E_{K'}(x) = 2.$ **37.** $E_{U'}(x) = \dfrac{-2x}{x+1}.$

38. Na podstawie zad. 30 mamy

$$E_K(x) = x\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{K'(x)}{\dfrac{K(x)}{x}} = \frac{K'(x)}{k(x)}.$$

39. $\dfrac{E_k(x)}{E_K(x)} = 1 - \dfrac{k(x)}{K(x)}.$

40. Mamy:

$$E_f(x) = \frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{x}{2(x-y)},$$

$$E_f(y) = \frac{y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{-y}{2(x-y)}.$$

Po podstawieniu $x_0 = 7$, $y_0 = 0{,}3$ oraz po skorzystaniu z zależności z zad. 32 otrzymujemy:

a) podaż wzrośnie o około 0,52%, **b)** podaż zmaleje o około 0,07%.

41. Cenę masła należy obniżyć o około 3,82%.
Wskazówka: Skorzystać z zależności ustalonych w rozwiązaniu zad. 40.

42. a) Mamy:

$$E_f(x) = \frac{x\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = 0{,}57, \qquad E_f(y) = \frac{y\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = 0{,}43.$$

b) Z zależności z zad. 32 otrzymujemy

$$q \cong sE_f(x) \cong 3\cdot 0{,}57\% \cong 1{,}71\%.$$

43. Z zależności $Kx+Ly = M$ wyznaczamy $y = \frac{M}{L} - \frac{K}{L}x$.

Stąd

$$F(x) = f(x,y) = x^{1/5}\left(\frac{M}{L} - \frac{K}{L}x\right)^{4/5}.$$

Dalej mamy

$$F'(x) = \frac{1}{5}\,\frac{\frac{M}{L} - \frac{5K}{L}x}{x^{4/5}\left(\frac{M}{L} - \frac{K}{L}x\right)^{1/5}}.$$

Stąd $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}\frac{M}{K}$. Łatwo wykazać, że w tym punkcie funkcja F osiąga maksimum.

44. Z założeń zadania otrzymujemy zależność $xyz = 1000$. Stąd np. $z = 1000/xy$.

Z drugiej strony koszt produkcji przy zużyciu x ton aluminium, y ton żelaza i z ton magnezu wynosi

$$K(x,y,z) = 60x+40y+80z.$$

Stąd

$$\bar{K}(x,y) = K(x,y,1000/xy) = 60x+40y+80000/xy.$$

Ze związków

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial x} = 60 - \frac{80000}{yx^2} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{K}}{\partial y} = 40 - \frac{80000}{xy^2} = 0$$

wyznaczamy $x = 20/\sqrt[3]{9}$, $y = 10\sqrt[3]{3}$, $z = 5\sqrt[3]{3}$.

Sprawdzenie, czy przy tych wartościach x, y, z funkcja K osiąga minimum pozostawiamy Czytelnikowi.

45. Wskazówka: Zauważmy, że z zależności $px+qy = B$ oraz $Q(x,y) = xy-x-y+1$ otrzymujemy

$$\bar{Q}(x) = -\frac{p}{q}x^2+x\left(\frac{B}{q}+\frac{p}{q}-1\right)+1-\frac{B}{q}.$$

Należy zatem wyznaczyć maksimum funkcji $\bar{Q}$.

46. Wskazówka: Pochodne cząstkowe funkcji $K-\lambda_1 l-\lambda_2 h$ względem zmiennych l_1, l_2, D_1 i D_2 muszą być równe zeru dla odpowiednich stałych λ_1 i λ_2. Wyeliminować λ_1 przez odjęcie dwóch równań oraz λ_2 przez podzielenie dwóch równań.

47. Na podstawie danych z zadania mamy

$$U(100)-U(0) = \int_0^{100} U'(x)\,dx = \int_0^{100} (15-0{,}1x)\,dx = 1000.$$

Stąd $U(100) = 1000$.

48. $U(300) = U(0)+\int_0^{300} U'(x)\,dx = 7200.$

49. a) $U(x) = U(0)+\int_0^{x} U'(t)\,dt = 0{,}00005x^3-0{,}005x^2+36x.$

b) $U(100)-U(50) = 1806{,}25.$

50. a) $\int_0^{10} S(t)\,dt = \int_0^{10} 260e^{0,1t}dt \cong 4468$ zł.

b) Szukamy liczby naturalnej n takiej, dla której

$$\int_0^{n} 260e^{0,1t}dt \geqslant 10000.$$

Stąd wynika, że $n \geqslant 16$ dni.

51. a) $U(t) = U(0)+\int_0^{t} U'(s)\,ds = 2000(e^{t/2}-1).$

b) $K(t) = K(0)+\int_0^{t} K'(s)\,ds = 1000t-t^2$. Ale $Z(t) = U(t)-K(t)$, więc stąd otrzymujemy $Z(t) = 2000(e^{7/2}-1)-7000+49 \cong 57280$ zł.

52. a) Nadwyżka konsumpcyjna jest równa polu powierzchni ograniczonej krzywą $p = D(x)$ i prostymi $p = b$, $x = 0$, $x = a$.

b) Nadwyżka produkcyjna jest polem powierzchni między krzywą $p = S(x)$ i prostymi $p = b$, $x = 0$, $x = a$.

c) Nadwyżka konsumpcyjna jest równa $1/2$, natomiast nadwyżka produkcyjna wynosi $2/3$.

53. Mamy:

$$p_{śr}=\frac{1}{5-4}\int\limits_4^5 p(x)\,dx=\int\limits_4^5\frac{x}{2x^2+1}\,dx=\frac{1}{4}\ln\frac{17}{11}.$$

54. Zauważmy, że (por. zad. 29):

$$T_D(t)=\frac{D'(t)}{D(t)}.$$

Stąd

$$\big(T_D(t)\big)_{śr}=\frac{1}{5-4}\int\limits_4^5\frac{D'(t)}{D(t)}\,dt=\ln\frac{2+3\sqrt{5}}{8}.$$

55. Średnią wartość kosztów przeciętnych otrzymujemy w następujący sposób:

$$k_{śr}=\frac{1}{16-9}\int\limits_9^{16}k(x)\,dx=\frac{1}{7}\int\limits_9^{16}\frac{K(x)}{x}\,dx=\frac{1}{7}\int\limits_9^{16}\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=12\frac{11}{14}.$$

56. $z_{\min}=z(20)=8$, $z_{śr}=142{,}5$.

57. Przyrost kosztu całkowitego jest równy całce $\int\limits_9^{10}K'(x)\,dx$. Stąd

$$\int\limits_9^{10}K'(x)\,dx=\frac{1}{20}\int\limits_9^{10}(x-4)^2dx\cong 1{,}52\text{ mln zł}.$$

Koszty przeciętne są zatem równe

$$k(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{0{,}1+\int_0^x K'(t)\,dt}{x}=\frac{(x-4)^3+70}{60x}.$$

58. Procent wykonania dziennej normy jest równy

$$\frac{100}{80}\int\limits_0^8 w(t)\,dt.$$

Zatem

$$\frac{100}{80}\int\limits_0^8 w(t)\,dt=1{,}25\int\limits_0^8\left(-\frac{1}{6}t^2+t+12\right)dt=124{,}44\%.$$

Zauważmy dalej, że robotnik będzie pracował aż do momentu, w którym jego wydajność będzie równa zeru. Po rozwiązaniu równania $w(t) = 0$ otrzymujemy $t = 12$. Zatem robotnik może pracować 4 godziny nadliczbowe.

59. Zgodnie z danymi w zadaniu, mamy

$$K(x) = C + \int_0^x K'(t)\,dt = C + \int_0^x \frac{2}{\sqrt[3]{t+6}}\,dt = C + 3\left[\sqrt[3]{(x+6)^2} - \sqrt[3]{36}\right].$$

Dalej

$$60 = K(2) = C + 3\left[4 - \sqrt[3]{36}\right] \Rightarrow C = 48 + 3\sqrt[3]{36}.$$

Zatem

$$K(x) = 48 + 3\sqrt[3]{36} + 3\left[\sqrt[3]{(x+6)^2} - \sqrt[3]{36}\right].$$

60. Szybkość reakcji maleje w czasie $0 \leqslant t \leqslant 1$ oraz rośnie w czasie $1 \leqslant t \leqslant 10$. Najmniejsza jest dla $t = 1$, a największa w punkcie $t = 10$.

61. a) $t_{max} = 4$. **b)** W punktach $t = 0$ i $t = 8$ szybkość wzrostu liczby głosujących jest równa 0.

62. Funkcja P osiąga największą wartość dla $x = 20/3$ (w praktyce oznacza to, że dla $x = 7$ sów), natomiast najmniejszą dla $x = 0$ i $x = 10$.

63. Oznaczmy przez $S/2$ pole trójkąta. Z założenia $xy = S$, gdzie x i y oznaczają długości boków przyprostokątnych. Jeżeli oznaczymy przez p obwód naszego trójkąta, to mamy

$$p = x + y + \sqrt{x^2+y^2} = x + \frac{S}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{S^2}{x^2}}.$$

Dla trójkąta równoramiennego mamy $x = y = \sqrt{S}$. Wtedy

$$dp/dx = 1 - \frac{S}{x^2} + \frac{2x - \dfrac{2S^2}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{S^2}{x^2}}}$$

i dalej

$$dp/dx|_{x=\sqrt{S}} = 0.$$

Zauważmy, że informacja o prędkości wzrostu jednej z nibynóżek ameby jest tutaj zbędna.

64. a) Wrażliwość jest równa $T'(x)$, gdzie

$$T'(x) = \frac{x}{4}\left(1 - \frac{3x}{32}\right).$$

b) Wrażliwość jest największa dla $x = 32/3$.

65. $K_{\max} = K(2) = 1/50$.

66. **b)** Na podstawie (a) wnioskujemy, że $L = c\ln(I/I_0)$. Stąd otrzymujemy $c\ln(I/I_0) = 10\log_{10}(I/I_0)$. Zatem $c = 10/\ln 10$.

67. **b)** Po zlogarytmowaniu obu stron równości $P = P_0 e^{-Ct/W}$ otrzymujemy

$$\ln P = \ln P_0 - \frac{Ct}{W},$$

skąd $\ln(P_0/P) = Ct/W$. Zatem po 1 sekundzie ($t = 1$) mamy $\ln(P_0/P) = C/W$.

69. **a)** i **b)** 44% na godzinę.

71. Z danych w zadaniu wnioskujemy, że $P'(t) = 20e^{3t}$ oraz $P(0) = 100$. Stąd

$$P(t) = P(0) + \int_0^t P'(s)\,ds = 100 + \int_0^t 20e^{3s}ds = 100 + \frac{20}{3}(e^{3t} - 1).$$

Zatem

$$P(50) = 100 + \frac{20}{3}(e^{150} - 1) \cong 9{,}2 \cdot 10^{65} \text{ bakterii.}$$

72. $\lim\limits_{t \to \infty} N(t) = N_0$. Oznacza to, że liczebność populacji w odległym czasie będzie dążyć do punktu równowagi N_0.

73. Psycholog obliczył granicę

$$\lim_{n \to \infty} R = \lim_{n \to \infty} \frac{nr}{1 + (n-1)r},$$

która właśnie jest równa 1.

74. Z zależności $N = N_p + N_l$ otrzymujemy

$$S = S(N_p) = k\left[N_p \ln\frac{N}{N_p} + (N - N_p)\ln\frac{N}{N - N_p}\right].$$

Stąd

$$S' = k\ln\frac{N - N_p}{N_p}.$$

Zatem $S' = 0 \Leftrightarrow N_p = \frac{1}{2}N$. Nietrudno udowodnić, że funkcja S osiąga maksimum w tym właśnie punkcie. Wtedy również $N_l = \frac{1}{2}N$. Zatem mieszanina o maksymalnej entropii powinna zawierać tyle samo lewoskrętnego i prawoskrętnego kwasu winowego.

75. $t_{\max} = \dfrac{1}{p-q} \ln \dfrac{p}{q}$.

76. Wzór $v(t) = x'(t) = ake^{-kt}$ określa szybkość reakcji. Zatem poszukiwana średnia szybkości reakcji wynosi

$$v(c) = \frac{1}{T}\int_0^T x'(t)\,dt = \frac{a}{T}(1-e^{-kT}) = \frac{x(T)}{T}.$$

77. a) Zauważmy, że

$$C(t) = C(0) + \int_0^t C'(s)\,ds = C(0) + 1000\left(\frac{t^2}{2} - 7t\right).$$

Jeżeli przyjmiemy $C(0) = 40000$ oraz $C(t) = \frac{1}{2}C(0) = 20000$, to otrzymamy równość

$$20000 = 40000 + 1000\left(\frac{t^2}{2} - 7t\right)$$

skąd

$$t^2 - 7t + 20 = 0.$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania w przedziale $[0,7]$ jest $t = 4$. Zatem inspektor zakończy pracę w piątym dniu.

b) Zmiana stężenia od czwartego do szóstego dnia wynosi

$$\int_4^6 C'(t)\,dt = 1000\int_4^6 (t-7)\,dt = -4000.$$

78. a) Po obliczeniu całki występującej w równaniu otrzymujemy, że

$$\frac{1}{20}\ln\left|\frac{80-x}{60-x}\right| = kt + C.$$

A po uwzględnieniu, że $x(0) = 0$, otrzymujemy

$$\frac{1}{20}\ln\left|\frac{80-x}{60-x}\right| = kt + \frac{1}{20}\ln\frac{4}{3}.$$

Stąd

$$x(t) = \frac{240(e^{20kt}-1)}{4e^{20kt}-3}.$$

b) Ponieważ $x(10) = 20$, więc z równości otrzymanej w (a) otrzymamy $k = \frac{1}{200} \ln \frac{9}{8}$. Stąd $x(15) \cong 26{,}2$ kg.

79. Po podstawieniu podanych w zadaniu wartości ($\mu = 62{,}484$, $\sigma = \sqrt{5{,}714} = 2{,}3904$, $\tau = 63$) otrzymujemy

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0{,}2159} e^{-x^2/2} dx.$$

Stąd i z własności rozkładu normalnego mamy:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{0{,}2159} e^{-x^2/2} dx = 0{,}5 + \int_{0}^{0{,}2159} e^{-x^2/2} dx.$$

Po odczytaniu wartości ostatniej całki z tablic rozkładu normalnego otrzymujemy

$$P = 0{,}5 + 0{,}087 = 0{,}587.$$

Zatem, przeciętnie 59 matek na 100 ma wzrost nie większy niż 63 cale (= 157,5 cm).

80. Niech S_1 i S_2 oznaczają ilość substancji wydalanych z organizmu z szybkościami v_1 i v_2 podanymi w zadaniu. Wtedy

$$S_1 = \int_0^\infty v_1(t)\, dt, \quad S_2 = \int_0^\infty v_2(t)\, dt.$$

Stąd

$$S_1 = \alpha A \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)t} dt = -\frac{\alpha A}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t} \Big|_0^\infty = \frac{\alpha A}{\alpha+\beta}.$$

Podobnie $S_2 = \frac{\beta A}{\alpha+\beta}$. Zatem $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\alpha}{\beta}$.

81. Ciepło właściwe ciała o temperaturze t_0 jest równe pochodnej $Q'(t_0)$.

82. Niech r oznacza promień balonu, a V jego objętość. Wtedy $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, więc

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Ale w chwili, o której mowa w zadaniu, mamy:

$$\frac{dV}{dt} = 50, \; r = 10.$$

Zatem

$$\frac{dr}{dt} = \frac{50}{400}\pi = \frac{1}{8}\pi \cong 0{,}04 \, \mathrm{cm/s}.$$

83. Niech x oznacza odległość cienia balonu od podstawy latarni po t sekundach od wypuszczenia balonu. Nietrudno wykazać, że $x = \dfrac{300}{30-2t}$. Stąd wyznaczamy $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{600}{(30-2t)^2}$. Zatem poszukiwana prędkość 150/121 m/s.

84. 0,0602.

Wskazówka: Skorzystać z zależności $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dp}{dx}\dfrac{dx}{dt}$.

85. $\lim\limits_{t \to \infty} \mathscr{V}(t) = 4.$

88. $\lambda_{\max} = k/5T.$

89. $x_{\max} = r.$

90. $\sin\alpha/\sin\beta = v_1/v_2.$

91. **a)** $v_{\min} = \sqrt[4]{d/3c}.$

92. $r_{\max} = \sqrt{3}.$

93. Zauważmy, że aby rozwiązać równanie $\partial E/\partial\lambda = 0$ wystarczy rozwiązać równanie $[x^5/(e^x-1)]' = 0$. Stąd wynika, że x musi spełniać równanie $5-x-5e^{-x} = 0$. Niech x_0 oznacza rozwiązanie (dodatnie) tego równania. Nietrudno wykazać (np. szkicując wykres funkcji $f(x) = 5-x-5e^{-x}$), że takie rozwiązanie istnieje i jest tylko jedno, a ponadto funkcja $x^5/(e^x-1)$ osiąga maksimum w punkcie x_0. Stąd ostatecznie $\lambda_{\max} = hc/kTx_0$. Można również pokazać, że $x_0 \cong 4{,}963$.

94. Zauważmy, że z równania van der Waalsa otrzymujemy

$$p = \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}$$

dla $V \in (b, +\infty)$. Stąd

$$\lim_{V \to +\infty} p(V) = 0, \; \lim_{V \to b} p(V) = +\infty.$$

Dalej mamy

$$\frac{dp}{dV} = \frac{-RTV^2 + 2\alpha(V-\beta)^2}{(V-\beta)^2 V^2}.$$

Widzimy, że równanie

$$-RTV^2 + 2\alpha(V-\beta)^2 = 0$$

ma jeden pierwiastek ujemny. Wyznaczmy temperaturę T_0 tak, żeby to równanie miało dokładnie jeden pierwiastek. Mamy:

$$\frac{d^2p}{dV^2} = \frac{2RTV^4-(V-\beta)^2\,6\alpha}{(V-\beta)^2\,V^4}.$$

Po rozwiązaniu układu równań

$$2RTV^3 = 2\alpha(V-\beta)^2$$
$$2RTV^4 = 6\alpha(V-\beta)^2$$

otrzymujemy $V_0 = 3b$. Punkt ten jest punktem przegięcia funkcji przy temperaturze $T_0 = 8\alpha/27bR$. Czytelnik zechce sporządzić wykres funkcji $p(V)$.

95. Poruszając się na północ zwiększamy x przy stałym y. Zatem

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (-0{,}0003)\cdot 2xy = (-0{,}0003)\,2(55{,}7)(120{,}2) \cong -4{,}017.$$

Oznacza to, że temperatura obniża się wraz z prędkością 4,017°C na stopień szerokości geograficznej.

98. Po obliczeniu pochodnych cząstkowych $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ i wstawieniu do równania Schrödingera łatwo stwierdzamy, że redukuje się ono do podanej w zadaniu postaci.

99. a) $\operatorname{grad} V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{x+x_0}{r_1^2} - \frac{x-x_0}{r_2^2}\right), 2y\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)\right).$

100. Na podstawie twierdzenia o funkcji uwikłanej mamy:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z},\ \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_x}.$$

Stąd otrzymujemy łatwo, że

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial z} = -1.$$

102. Zauważmy najpierw, że po skorzystaniu z równości z zad. 100 (a właściwie z pewnej, łatwej do udowodnienia, modyfikacji tej równości) otrzymujemy

$$(*)\quad \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\partial p}{\partial T}\bigg/\frac{\partial p}{\partial V}.$$

Teraz z równania Dietericiego otrzymujemy

$$p = \frac{RT}{V-b}e^{-a/TRV}.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{RTV+a}{TV(V-b)} e^{-a/RTV}, \qquad \frac{\partial p}{\partial V} = \frac{a(V-b)-RTV^2}{V^2(V-b)^2} e^{-a/RTV}.$$

Z powyższych równości oraz z (*) mamy teraz

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{RTV+a}{TV(V-b)} \frac{V^2(V-b)^2}{RTV^2-a(V-b)} = \left(RV+\frac{a}{T}\right)\left(\frac{RTV^2-(V-b)}{V(V-b)}\right)^{-1} =$$

$$= V\left(R+\frac{a}{TV}\right)\left(\frac{RTV}{V-b}-\frac{a}{V}\right)^{-1} = V\left(R+\frac{a}{TV}\right)\frac{1}{V}\left(\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}\right)^{-1} =$$

$$= \left(R+\frac{a}{TV}\right)\left(\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}\right)^{-1}$$

Koniec dowodu.

104. Z zad. 81 mamy:

$$c_{śr} = \frac{1}{t}\int_0^t c(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t (a+bs+cs^2)\,ds = a+\frac{1}{2}bt+\frac{1}{3}ct^2.$$

105. $Q(t) = EC\left[1-e^{-\alpha t}\left(\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)\right].$

106. Po scałkowaniu przez części otrzymujemy

$Q(t) = EC\,[1-e^{-\alpha t}(1+\alpha t)].$

107. Poszukiwana odległość d wynosi

$$d = \int_{1/60}^{3/60} v(t)\,dt = \int_{1/60}^{1/20} (100+e^{-3t}\sin 2\pi t)\,dt.$$

Stąd

$$d = \frac{10}{3} - \frac{3}{9+4\pi^2}\left\{e^{-3/20}\left[\sin\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{30}\right]-e^{-1/60}\left[\sin\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{30}\right]\right\}.$$

108. a) Po scałkowaniu obu stron podanej w zadaniu równości w przedziale od 0 do t otrzymamy naszą równość.

b) Miejscami zerowymi są punkty $t = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Maksima odległości są osiągane w punktach $t = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, gdy n jest nieparzyste.

109. Łatwo pokazać, że $\int_t^{t+h} r^2\varphi' ds = kh.$

111. Zauważmy, że

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{nRT}{V-nb}-\frac{an^2}{V^2}\right)dV = nRT\ln\frac{V_2-nb}{V_1-nb} - \frac{an^2(V_2-V_1)}{V_1 V_2}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $L = 11069$ J.

112. Wiadomo, że

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-ax}dx = 2\int_0^\infty z^2 e^{-az^2}dz = 2\int_0^\infty -\frac{d}{da}(e^{-az^2})\,dz = -2\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}.$$

Zauważmy dalej, że

$$\frac{1}{Ae^x-1} = \frac{\dfrac{e^{-x}}{A}}{(Ae^x-1)\dfrac{e^{-x}}{A}} = \frac{e^{-x}}{A}\left(1+\frac{e^{-x}}{A}+\frac{e^{-2x}}{A^2}+\dots\right).$$

Ponieważ szereg po prawej stronie powyższej równości jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, \infty)$, więc otrzymujemy ostatecznie:

$$n = \frac{2f}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{1/2}\frac{e^{-x}}{A}\left(1+\frac{e^{-x}}{A}+\frac{e^{-2x}}{A^2}+\dots\right)dx = \frac{f}{A}\left(1+\frac{1}{2^{3/2}A}+\frac{1}{3^{3/2}A^2}+\dots\right).$$

113. Całkowitą energię E n fermionów można wyrazić wzorem

$$E = \frac{3kTf}{2A}\left(1+\frac{1}{2^{5/2}A}+\frac{1}{3^{5/2}A}+\dots\right).$$

W dowodzie należy skorzystać z równości

$$\int_0^\infty x^{3/2}e^{-ax}dx = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{5/2}}$$

(por. rozwiązanie poprzedniego zadania).

114. Przyjęte w zadaniu założenia umożliwiają wyprowadzenie następującego łańcucha nierówności:

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Me^{a|s|}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}ds \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Me^{a|x|+a|s-x|}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}ds =$$

$$= \frac{2Me^{a|x|}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{a|s-x|}{2\sqrt{t}}2\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\frac{d(s-x)}{2\sqrt{t}} = \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2+a|\eta|2\sqrt{t}}d\eta =$$

$$= \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\eta^2 + a\eta 2\sqrt{t}}\, d\eta = \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(\eta - a\sqrt{t})^2}\, d\eta <$$

$$< \frac{2Me^{a^2 t} e^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = 2Me^{a^2 t} e^{a|x|}.$$

Dowodzi to naszej nierówności i zbieżności rozważanej całki.

115. Po zróżniczkowaniu względem s funkcji postaci

$$\psi(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2} H(s),$$

gdzie $H(s) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i s^{k+i}$, możemy równanie Schrödingera przekształcić do postaci

$$\frac{d^2 H}{ds^2} - 2s \frac{dH}{ds} + nH = 0,$$

gdzie $2n = \dfrac{2E}{hv} - 1$.

Dalej, po zróżniczkowaniu funkcji $H(s) = e^{\frac{1}{2}s^2} \psi(s)$, gdzie $\psi(s)$ ma postać podaną w zadaniu, a następnie wstawieniu do wyżej otrzymanego równania i zgrupowaniu wyrazów o tych samych potęgach, otrzymujemy:

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i(k+i)(k+i-1)s^{k+i-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i[2n - 2(k+i)]\, s^{k+i} = 0.$$

Następnie w pierwszej sumie równości (*) wyodrębniamy dwa pierwsze wyrazy i zastępujemy wskaźnik i przez $j+2$. Ponadto, w drugiej sumie wskaźnik bieżący zastępujemy wskaźnikiem j. Po tych przekształceniach równość (*) przyjmuje postać

$$a_0 k(k-1)s^{k-2} + a_1(k+1)ks^{k-1} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} [a_j(2n-2k-2j) + a_{j+2}(k+j+2)(k+j+1)]\, s^{k+j} = 0.$$

Ponieważ równość (*) jest spełniona dla dowolnego s, więc stąd mamy

$$a_0 k(k-1) = 0,$$

$$a_1(k+1)k = 0,$$

$$a_{j+2} = -\frac{2(n-k-j)}{(k+j+2)(k+j+1)} a_j \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

Jeżeli założymy, że $a_0 \neq 0$, to wówczas $k = 0$ lub $k = 1$. W pierwszym z tych przypadków otrzymujemy

$$a_{j+2} = -\frac{2(n-j)}{(j+2)(j+1)}a_j \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

W drugim przypadku mamy:

$$a_{j+2} = -\frac{2(n-1-j)}{(j+3)(j+2)}a_j \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

LITERATURA

1. Berman G.N.: *Zbiór zadań z analizy matematycznej*. Moskwa, Nauka 1977 (w języku rosyjskim).
2. Birkholc A.: *Analiza matematyczna dla nauczycieli*. Warszawa, PWN 1977.
3. Browkin J.: *Zadania z olimpiad matematycznych*. T. 5. Warszawa, WSiP 1980.
4. Demidowicz B.P.: *Zbiór zadań i ćwiczeń z analizy matematycznej*. Moskwa, Nauka 1971 (w języku rosyjskim).
5. Feynman R.P.: *Wykłady z mechaniki statystycznej*. Warszawa, PWN 1980.
6. Fichtenholz G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*. T. 1 i 2. Warszawa, PWN 1980.
7. Giunter N.M., Kuźmin R.O.: *Zbiór zadań z matematyki wyższej*. T.2. Warszawa, PWN 1959.
8. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G.: *Inequalities*. Cambridge University Press 1967.
9. Herman T.W., Uchman G.: *Ćwiczenia z chemii fizycznej dla studentów farmacji i analityki medycznej*. A.M. im. K. Marcinkowskiego, Poznań 1991.
10. Kuratowski K.: *Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej*. Warszawa, PWN 1973.
11. Kuratowski K.: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. Warszawa, PWN 1977.
12. Kuratowski K., Mostowski A.: *Teoria mnogości*. Warszawa, PWN 1978.
13. Liaszko I.I., Bojarczuk A.K., Gaj J.G., Gołowacz G.P.: *Analiza matematyczna w przykładach i zadaniach*. Kijów, Wyższa Szkoła 1974 (w języku rosyjskim).
14. Marsden J., Weinstein A.: *Calculus*. t. 1, 2 i 3. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, Springer Verlag 1985.
15. Mitrinović D.S.: *Analytic inequalities*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag 1970.
16. Mitrinović D.S.: *Elementarne nierówności*. Warszawa, PWN 1972.
17. Rudin W.: *Podstawy analizy matematycznej*. Warszawa, PWN 1982.
18. Sierpiński W.: *Działania nieskończone*. Warszawa, Czytelnik 1948.
19. Stankiewicz W.: *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*. Warszawa, PWN 1982.
20. Popularny miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny „*DELTA*" lata 1978–1995.

Podręcznik **Matematyka, cz. I - IV** *otrzymał Nagrodę Główną na I Krajowych Targach Książki Akademickiej* ATENA' 94.

PODRĘCZNIKI AKADEMICKIE (Matematyka), seria **eit**

- **Matematyka, cz. I. W. Żakowski, G. Decewicz**
  Zawiera elementy nauki o zbiorach i funkcjach oraz podstawowe wiadomości z rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej.

- **Matematyka, cz. II. W. Żakowski, W. Kołodziej**
  Zawiera rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych, wiadomości z zakresu teorii szeregów i całek niewłaściwych oraz elementy analizy funkcjonalnej.

- **Matematyka, cz. III. T. Trajdos**
  Zawiera geometrię analityczną, teorię wektorów, wyznaczników i macierzy oraz geometrię różniczkową w ujęciu tensorowym wraz ze wstępem do teorii rozmaitości różniczkowalnych.

- **Matematyka, cz. IV. W. Żakowski, W. Leksiński**
  Zawiera równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, funkcje zmiennej zespolonej oraz przekształcenie całkowe Fouriera.

- **Matematyka. Definicje, twierdzenia, przykłady, zadania W. Leksiński, I. Nabiałek, W. Żakowski**
  Zawiera materiał wykładany na ćwiczeniach z matematyki dla studentów pierwszych lat politechnik.

- **Metody numeryczne. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski**
  Zawiera metody interpolacyjne i aproksymacyjne, całkowanie numeryczne, metody rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych oraz równań różniczkowych. Podano również przykłady programów w języku *Turbo Pascal.*

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE
00-048 Warszawa, Mazowiecka 2/4
TEL./FAX 826-82-93

⇒ ***Zamawiam za zaliczeniem pocztowym następujące książki:***

MATEMATYKA

- *Bryant V.:* **Aspekty kombinatoryki** — 25,00 zł ... egz.
- *Gajek L., Kałuszka M.:* **Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody** — 10,00 zł ... egz.
- *Grabowski M.:* **Analiza matematyczna Powtórzenie, ćwiczenia i zbiór zadań** — 19,50 zł ... egz.
- *Kaczorek T.:* **Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice** — 30,00 zł ... egz.
- *Kącki E.:* **Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki** — 12,50 zł ... egz.
- *Leitner R.:* **Zarys matematyki wyższej dla studentów. Cz. II** — 21,00 zł ... egz.
- *Leitner R.:* **Zarys matematyki wyższej dla studentów. Cz. III** — 16,00 zł ... egz.
- *Leitner R., Matuszewski W, Rojek Z.:* **Zadania z matematyki wyższej. Cz. I** — 19,50 zł ... egz.
- *Mawhin J.:* **Metody wariacyjne dla nieliniowych problemów Dirichleta** — 6,00 zł ... egz.
- *Morrison F.:* **Sztuka modelowania układów dynamicznych deterministycznych, chaotycznych, stochastycznych** — 26,00 zł ... egz.
- *Ott E.:* **Chaos w układach dynamicznych** — 33,50 zł ... egz.
- *Palczewski A.:* **Równania różniczkowe zwyczajne Teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych** — 35,00 zł ... egz.
- *Palka Z., Ruciński A.:* **Niekonstruktywne metody matematyki dyskretnej** — 7,25 zł ... egz.
- *Palka Z., Ruciński A.:* **Wykłady z kombinatoryki.. Część 1** — 19,50 zł ... egz.
- *Piskorek A.:* **Równania całkowe. Elementy teorii i zastosowania** — 29,00 zł ... egz.
- *Przybyło S., Szlachtowski A.:* **Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach** — 12,80 zł ... egz.
- *Ribenboim P.:* **Mała księga wielkich liczb pierwszych** — 20,50 zł ... egz.
- *Small D.B., Hosack J.M.:* **Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniem obliczeń symbolicznych** — 14,00 zł ... egz.
- *Sobczyk K.:* **Stochastyczne równania różniczkowe** — 28,00 zł ... egz.
- *Sobczyk K., Spencer B.F., Jr:* **Stochastyczne modele zmęczenia materiałów** — 20,00 zł ... egz.
- *Weron A., Weron R.:* **Inżynieria finansowa.. Wycena instrumentów pochodnych, symulacje komputerowe, statystyka rynku** — 35,00 zł ... egz.
- *Wieczorkowski R., Zieliński R.:* **Komputerowe generatory liczb losowych** — 11,00 zł ... egz.
- *Żakowski W.:* **Matematyka. Ćwiczenia problemowe dla politechnik** — 7,00 zł ... egz.

PODRĘCZNIKI AKADEMICKIE. EIT

- *Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.:* **Metody numeryczne** — 29,00 zł ... egz.
- *Żakowski W., Decewicz G.:* **Matematyka Cz. I** — 19,50 zł ... egz.
- *Żakowski W., Kołodziej W.:* **Matematyka Cz. II** — 17,00 zł ... egz.
- *Trajdos T.:* **Matematyka Cz. III** — 17,00 zł ... egz.
- *Żakowski W., Leksiński W.:* **Matematyka Cz. IV** — 25,00 zł ... egz.

FIZYKA

- *Bobrowski Cz.:* **Fizyka – krótki kurs** 34,00 zł ... egz.
- *Heermann D.W.:* **Podstawy symulacji komputerowych w fizyce** 14,00 zł ... egz.
- *Oleś A.:* **Metody doświadczalne fizyki ciała stałego** 57,00 zł ... egz.
- *Orear J.:* **Fizyka t. 1/2** 33,00 zł ... egz.
- *Stankowski J., Czyżak B.:* **Nadprzewodnictwo** 22,00 zł ... egz.
- *Stauffer D., Stanley H.E.:* **Od Newtona do Mandelbrota. Wstęp do fizyki teoretycznej (+ dyskietka gratis)** 29,80 zł ... egz.
- *White M., Gribbin J.:* **Einstein. Życie nauką** 12,00 zł ... egz.

W PRZYGOTOWANIU

- *Conway J.H., Guy R.K.:* **Księga liczb**
- *Klukowski J., Nabiałek I.:* **Algebra**
- *Leitner R.:* **Zarys matematyki wyższej dla studentów. Część I**
- *Leitner R., Matuszewski W., Rojek Z.:* **Zadania z matematyki wyższej. Część II**
- *Leksiński W., Nabiałek J., Żakowski W.:* **Matematyka. Definicje, twierdzenia, przykłady, zadania**

....

data podpis zamawiającego

Zamówienie na wybrane książki proszę wysłać pod adresem:

Dział Handlowy Wydawnictw Naukowo-Technicznych
Skrytka pocztowa 359, 00-950 Warszawa

Zamówienia przyjmujemy również za pośrednictwem poczty elektronicznej.

Nasz adres: wnt@pol.pl

Zamawiający:

Imię i nazwisko . . . .

Adres . . . .

. . . .

NIP . . . .

Przy zakupie książek o wartości przekraczającej 100,00 zł udzielamy 10% rabatu.

INTERNET – nasza oferta na stronie WWW
www.wnt.com.pl

Powyższe ceny obowiązują do wyczerpania nakładu danego tytułu